

CÁLCULO DEL GRADIENTE GEOTÉRMICO USANDO EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

CALCULATION OF THE GEOTHERMAL GRADIENT USING THE FINITE VOLUME METHOD

Julio Cesar Romero Pabón¹, Sergio Samuel Nieves Vanegas², Gabriel Mauricio Vergara Ríos³

¹Doctor en Ciencias de la Educación Mención Matemáticas. Profesor Titular. Universidad del Atlántico. Grupo de investigación de Sistemas Dinámicos y EDO. Barranquilla. Colombia.

Email: julioromero@mail.uniatlantico.edu.co.  <https://orcid.org/0000-0003-1620-9223>.

²Doctor en Ciencias. Profesor Titular. Universidad Autónoma del Caribe. Grupo de investigación de GMA. Barranquilla. Colombia.

Email: sergio.nieves@uac.edu.co.  <https://orcid.org/0000-0001-5000-0445>.

³Doctor en Ciencias de la Educación Mención Matemáticas. Profesor Titular. Universidad del Atlántico. Grupo de investigación de Sistemas Dinámicos y EDO. Barranquilla. Colombia.

Email: gabrielvergara@mail.uniatlantico.edu.co.  <https://orcid.org/0000-0002-4349-9505>.

Cite this article as: J. Romero, S. Nieves & G. Vergara "Cálculo Del Gradiente Geotérmico Usando El Método De Volúmenes Finitos", *Prospectiva*, Vol. 24 N° 2

Recibido: 23/02/2026 / Aceptado: 18/06/2026

RESUMEN

El gradiente geotérmico describe la variación de la temperatura con la profundidad en la corteza terrestre y constituye un parámetro esencial para la evaluación del potencial energético geotérmico. En este trabajo se modela la conducción de calor en la Tierra mediante la ecuación de difusión térmica en coordenadas esféricas, resolviéndola numéricamente con el método de volúmenes finitos (MVF). Este enfoque garantiza la conservación local de la energía en cada volumen de control y permite obtener una aproximación físicamente consistente del perfil térmico radial. Se implementó un esquema explícito en MATLAB, discretizando el radio terrestre en ocho nodos y evaluando la evolución temporal de la temperatura durante una hora con un paso de tiempo de 300 s. Los resultados muestran que la temperatura disminuye desde 7000 K en el núcleo hasta aproximadamente 925 K en la superficie después del intervalo simulado, reproduciendo un gradiente térmico coherente con valores reportados en estudios geofísicos. El método demuestra ser estable, conservativo y adecuado para el análisis numérico del gradiente geotérmico, constituyendo una herramienta útil tanto para aplicaciones científicas como didácticas.

Palabras claves: gradiente geotérmico, conducción de calor, ecuación diferencial parcial, método de volúmenes finitos.

ABSTRACT

The geothermal gradient describes the variation of temperature with depth in the Earth's crust and is a key parameter for assessing geothermal energy potential. This study models terrestrial heat conduction by solving the thermal diffusion equation in spherical coordinates using the finite volume method (FVM). This approach ensures local conservation of energy within each control volume and provides a physically consistent approximation of the radial temperature profile. An explicit numerical scheme was implemented in MATLAB, discretizing the Earth's radius into eight nodes and simulating the temporal evolution of

temperature over one hour with a time step of 300 s. The results indicate a temperature decrease from 7000 K at the core to approximately 925 K at the surface after the simulated interval, yielding a geothermal gradient consistent with values reported in geophysical studies. The method proves stable, conservative, and suitable for numerical analysis of geothermal gradients, offering a useful tool for both scientific applications and educational purposes.

Key words: geothermal gradient, heat conduction, partial differential equation, finite volume method.

1. INTRODUCCIÓN

El gradiente geotérmico constituye una de las variables fundamentales para comprender la dinámica térmica del interior terrestre y para estimar el potencial de aprovechamiento de la energía geotérmica. Su determinación precisa permite caracterizar la variación de la temperatura con la profundidad, evaluar la estabilidad térmica de formaciones geológicas y apoyar estudios aplicados en geofísica, ingeniería de yacimientos y energías renovables. En las últimas décadas, el desarrollo de métodos numéricos ha permitido modelar con mayor fidelidad los procesos de conducción y transferencia de calor en medios geológicos, proporcionando herramientas robustas para el análisis térmico de la corteza y el manto superior.

Entre los métodos numéricos empleados para resolver ecuaciones diferenciales parciales asociadas a la conducción de calor, destacan el método de diferencias finitas (MDF), el método de elementos finitos (MEF) y el método de volúmenes finitos (MVF). Aunque los tres enfoques han sido utilizados en estudios geotérmicos, el MVF presenta ventajas particulares cuando se requiere garantizar la conservación local de la energía y manejar dominios con geometrías complejas o propiedades físicas heterogéneas. A diferencia del MDF, que opera directamente sobre derivadas discretizadas, y del MEF, que requiere formulaciones variacionales más elaboradas, el MVF se basa en la integración de las ecuaciones de conservación sobre volúmenes de control, lo que asegura que los flujos de calor entre celdas adyacentes se mantengan físicamente consistentes. Esta característica ha motivado su adopción en simulaciones térmicas de alta precisión en ingeniería y geociencias.

En este trabajo se aborda la modelación del gradiente geotérmico mediante la resolución numérica de la ecuación de conducción de calor en coordenadas esféricas, empleando el método de volúmenes finitos. El modelo considera las propiedades térmicas globales de la Tierra, así como condiciones de frontera representativas del intercambio de energía entre el interior terrestre y la superficie. La formulación numérica se implementa en el entorno MATLAB, lo que permite discretizar el dominio radial, aplicar las ecuaciones de conservación en cada volumen de control y obtener la evolución temporal de la temperatura en distintos puntos del radio terrestre.

El propósito central de este estudio es mostrar la aplicabilidad y eficiencia del MVF en la simulación del gradiente geotérmico, destacando su capacidad para preservar la conservación energética y producir resultados coherentes con perfiles térmicos reportados en la literatura geofísica. Asimismo, se busca ofrecer una herramienta didáctica y computacional que facilite la comprensión de los procesos de transferencia de calor en el interior terrestre y que pueda ser extendida a escenarios más complejos, como medios estratificados o con variaciones espaciales de las propiedades térmicas.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El estudio de la conducción de calor en medios continuos se fundamenta en la ecuación de difusión térmica, la cual describe la evolución temporal de la temperatura en función de las propiedades físicas del material. Esta ecuación deriva de la combinación de la ley de Fourier y el principio de conservación de la energía, y constituye la base para el análisis numérico del gradiente geotérmico. Su resolución en geometrías complejas, como la estructura esférica de la Tierra, requiere métodos numéricos robustos capaces de preservar la conservación de energía en cada subdominio del modelo. Entre estos métodos, el método de volúmenes finitos (MVF) se ha consolidado como una herramienta fundamental en la ingeniería térmica y la geofísica computacional [1], [2], [3].

2.1. Ecuación de conducción de calor

La ley de Fourier establece que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura:

$$q = -k\nabla T,$$

donde k es la conductividad térmica del material. Al combinar esta expresión con la ecuación de conservación de la energía, se obtiene la ecuación diferencial parcial:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k\nabla T),$$

que, para un medio homogéneo e isotrópico, se reduce a:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T,$$

siendo $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ la difusividad térmica. Esta ecuación describe la propagación del calor en un sólido y

constituye el punto de partida para su discretización mediante el método de volúmenes finitos. Su forma general permite modelar procesos térmicos en medios tridimensionales, pero su complejidad aumenta cuando se emplean sistemas de coordenadas no cartesianas.

2.2. Formulación en coordenadas esféricas

Dado que la Tierra puede aproximarse como un cuerpo esférico, resulta natural expresar la ecuación de difusión en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . La forma general de la ecuación es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.1)$$

En el caso particular de simetría radial —válido cuando la temperatura depende únicamente de la distancia al centro— la ecuación se simplifica a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Esta forma reducida es la que se emplea en el presente trabajo para modelar la conducción de calor en el interior terrestre. Su simplicidad permite un tratamiento numérico más eficiente, sin perder la esencia física del proceso.

2.3. Método de Volúmenes Finitos

El método de volúmenes finitos (MVF) es una técnica numérica ampliamente utilizada en la resolución de ecuaciones de conservación. Su principal fortaleza radica en que garantiza la conservación local de las magnitudes físicas dentro de cada volumen de control, lo que lo convierte en un método especialmente adecuado para problemas de transferencia de calor y dinámica de fluidos [1], [2], [3].

El MVF divide el dominio en un conjunto de volúmenes de control adyacentes. En el centro de cada volumen se ubica un nodo computacional, donde se evalúan las variables del problema. La ecuación diferencial se integra sobre cada volumen de control, y los flujos a través de sus superficies se aproximan mediante

técnicas de interpolación y cuadratura [4]. Este proceso conduce a una ecuación algebraica por cada volumen, que relaciona el valor nodal con los nodos vecinos.

El algoritmo del MVF puede resumirse en tres pasos fundamentales:

a) Discretización del dominio

Se subdivide el dominio en volúmenes de control, calculando áreas y volúmenes asociados. Esta etapa define la malla sobre la cual se resolverá el problema.

b) Integración de la ecuación gobernante

Se aplica el teorema de la divergencia para transformar la ecuación diferencial en una ecuación integral equivalente, garantizando la conservación de energía en cada volumen.

c) Aproximación de flujos

Se emplean diferencias finitas para aproximar las derivadas de primer orden en las superficies del volumen de control, obteniendo así un sistema de ecuaciones algebraicas.

Este método es compatible con mallas estructuradas y no estructuradas, y conserva el significado físico de cada término discretizado. Por estas razones, constituye la base de los principales códigos comerciales de dinámica de fluidos, como **Fluent**, **Phoenix**, **Flow3D** y **Star-CD**.

2.4. Métodos numéricos alternativos

La ecuación de difusión térmica también puede resolverse mediante métodos de diferencias finitas progresivas o regresivas, los cuales presentan orden de convergencia $O(k + h^2)$ bajo condiciones de suavidad de la solución [5]. Asimismo, [6] describen métodos explícitos e implícitos para resolver EDP, donde:

- los **métodos explícitos** utilizan diferencias centradas en el espacio y adelantadas en el tiempo,
- los **métodos implícitos** evalúan las derivadas espaciales en el nivel temporal futuro.

Aunque estos métodos son eficientes, presentan limitaciones en geometrías no cartesianas, donde pueden aparecer términos indeterminados, como ocurre en coordenadas cilíndricas o esféricas. En tales casos, el MVF ofrece una formulación más robusta y físicamente consistente.

2.5. Consideraciones físicas

La temperatura es una magnitud escalar que caracteriza el estado térmico de un sistema. La ley cero de la termodinámica establece que dos sistemas en equilibrio térmico poseen la misma temperatura, fundamento esencial para la medición experimental mediante termómetros [7]. Las leyes de la termodinámica complementan este marco conceptual, relacionando el calor, el trabajo y la energía interna, y estableciendo restricciones sobre la conversión de energía y la evolución de la entropía [8].

2.6. Antecedentes geotérmicos

Estudios recientes han mostrado la importancia del modelado térmico en geociencias. Matiz (2018) desarrolló una metodología para estimar el gradiente geotérmico en cuencas sedimentarias colombianas mediante técnicas geoestadísticas, obteniendo valores máximos entre 79 y 81 °C/km. Por su parte, [9] estimaron el flujo de calor en zonas con hidratos de gas del Caribe colombiano mediante el análisis del reflector simulador de fondo (BSR), reportando valores entre 27.6 y 37.9 mW/m² según la región.

Estos antecedentes evidencian la relevancia del estudio del gradiente geotérmico y justifican el uso de métodos numéricos robustos como el MVF para su modelación.

3. Metodología

La metodología empleada en este estudio se basa en la aplicación del método de volúmenes finitos (MVF) para resolver la ecuación de conducción de calor en coordenadas esféricas, considerando la estructura radial de la Tierra y sus propiedades térmicas globales. El proceso metodológico se desarrolla en cuatro etapas principales: discretización del dominio, formulación integral de la ecuación gobernante, aproximación numérica de los flujos térmicos y resolución temporal mediante un esquema explícito.

3.1. Discretización del dominio

El dominio físico corresponde al radio terrestre, el cual se modela como una esfera homogénea de radio $R = 6371$ km. Para capturar la variación térmica desde el núcleo hasta la superficie, el dominio se divide en $N = 8$ nodos equidistantes:

$$\Delta r = \frac{R}{N-1}, r_i = i \Delta r, i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Cada nodo r_i se asocia a un volumen de control delimitado por las fronteras:

$$r_{w,i} = r_i - \frac{\Delta r}{2}, r_{e,i} = r_i + \frac{\Delta r}{2}.$$

Para el nodo central ($r = 0$), se impone:

$$r_{w,0} = 0,$$

y para el nodo superficial ($r = R$):

$$r_{e,N-1} = R.$$

El volumen de control asociado al nodo i es:

$$V_i = \frac{4\pi}{3} (r_{e,i}^3 - r_{w,i}^3),$$

y las áreas de las superficies oeste y este son:

$$A_{w,i} = 4\pi r_{w,i}^2, A_{e,i} = 4\pi r_{e,i}^2.$$

3.2. Formulación integral de la ecuación de conducción

La ecuación de conducción de calor en coordenadas esféricas bajo simetría radial es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Integrando esta ecuación sobre un volumen de control V_i y aplicando el teorema de la divergencia, se obtiene:

$$\rho C_p V_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = q_{w,i} A_{w,i} - q_{e,i} A_{e,i}, \quad (3.2)$$

donde los flujos de calor se definen como:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial r}.$$

3.3. Aproximación numérica de los flujos

Los flujos térmicos en las fronteras del volumen de control se aproximan mediante diferencias finitas:

a) Nodo central ($i = 0$)

Por simetría:

$$q_{w,0} = 0,$$

y

$$q_{e,0} = -k \frac{T_1^t - T_0^t}{\Delta r}.$$

b) Nodos internos ($0 < i < N-1$)

$$q_{w,i} = -k \frac{T_i^t - T_{i-1}^t}{\Delta r}, q_{e,i} = -k \frac{T_{i+1}^t - T_i^t}{\Delta r}.$$

c) Nodo superficial ($i = N-1$)

Se aplica una condición convectiva:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_{\infty}),$$

$$q_{e,N-1} = h(T_{N-1}^t - T_{\infty}).$$

por lo que:

3.4. Esquema temporal explícito

La derivada temporal se aproxima mediante diferencias hacia adelante:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} \approx \frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t}$$

Sustituyendo en (3.2), se obtiene la ecuación general del esquema explícito:

$$T_i^{t+\Delta t} = T_i^t + \frac{\Delta t}{\rho C_p V_i} (q_{w,i} A_{w,i} - q_{e,i} A_{e,i}). \quad (3.3)$$

Este esquema se aplica para cada nodo, considerando las expresiones particulares de los flujos en cada caso.

3.5. Condiciones iniciales y de frontera

Condición inicial

La temperatura inicial se define como:

$$T(r, 0) = T_{inc} = 7000 \text{ K}, 0 \leq r \leq R.$$

Condiciones de frontera

- **Centro de la Tierra** ($r = 0$) $\frac{\partial T}{\partial r} = 0.$
- **Superficie terrestre** ($r = R$) $-k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_{\infty}),$

con $h = 2 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, $T_{\infty} = 287.2 \text{ K}$.

3.6. Criterio de estabilidad

El esquema explícito requiere:

$$\Delta t < \frac{\rho C_p V_i \Delta r}{k(A_{w,i} + A_{e,i})},$$

para todos los nodos. En este estudio se emplea:

$$\Delta t = 300 \text{ s},$$

valor que satisface el criterio de estabilidad para todos los volúmenes de control.

3.7. Implementación computacional

El modelo se implementó en MATLAB, siguiendo los pasos:

1. Definición de parámetros físicos y geométricos.
2. Construcción de la malla radial y cálculo de V_i , $A_{w,i}$, $A_{e,i}$.
3. Inicialización del vector de temperaturas.
4. Aplicación iterativa del esquema explícito (3.3).
5. Almacenamiento de resultados para análisis y graficación.

Este procedimiento permite obtener la evolución temporal del perfil térmico radial durante una hora de simulación.

3.8 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS PARA EL CÁLCULO EL GRADIENTE GEOTÉRMICO.

La tierra tiene un radio medio de 6371 Km, con una densidad es de $5515 \frac{kg}{m^3}$, posee una capacidad calorífica de $660 \frac{k cal}{m^3 \text{ } ^\circ K}$ y un coeficiente de conductividad térmica $0.8 \frac{W}{m \text{ } ^\circ K}$, tiene inicialmente una temperatura en su exterior de $27 \text{ } ^\circ C$, mientras que la temperatura en centro es de $7000 \text{ } ^\circ K$ la cual es la misma en su núcleo de 3500 Km, calcule la temperatura de la esfera dentro de una 1 hora, en seis puntos equidistante de su centro, sabiendo que el coeficiente de transferencia de energía es de $8.080808 \times 10^{-7} \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$ analicela usando un salto de tiempo de 5 minutos.

Solución:

La ecuación de conservación de la energía y la ley de Fourier.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot q \quad \text{con} \quad q = -k \nabla T \quad \text{ec. 2}$$

Al sustituir la ley de Fourier en la ecuación de conservación de la energía se obtiene la ecuación de segundo orden.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad \text{ec. 3}$$

Que es la representación de la ecuación (1): $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$

Para el caso de nuestro problema de aplicación sobre el flujo de calor en la esfera de acero, se trabajará en coordenadas esféricas, lo que implica que el flujo de calor solo estará en la coordenada radial r . es decir $T(r, t)$

Con: $0 \leq r \leq R$ con $R = 6371 \text{ Km} = 6371000 \text{ m}$, $\rho = 5515 \frac{kg}{m^3}$, $C_p = 660 \frac{k cal}{m^3 \text{ } ^\circ K} = 2763288 \frac{J}{m^3 \text{ } ^\circ K}$

En las condiciones de frontera avece es necesario convertir temperaturas a otras escalas como son: Celsius ($^\circ C$), Fahrenheit ($^\circ F$) o Kelvin ($^\circ K$), usamos las siguientes fórmulas:

- Para convertir de $^\circ C$ a $^\circ F$ use la fórmula: $^\circ F = ^\circ C * 1.8 + 32$.
- Para convertir de $^\circ F$ a $^\circ C$ use la fórmula: $^\circ C = (^\circ F - 32) \div 1.8$.
- Para convertir de K a $^\circ C$ use la fórmula: $^\circ C = K - 273.15$.
- Para convertir de $^\circ C$ a K use la fórmula: $K = ^\circ C + 273.15$.

Condiciones iniciales: $T_{inc} = 7000 \text{ } ^\circ K$, $0 \leq r \leq R$, $t = 0$

Condiciones de frontera: $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$, $r = 0$, $t > 0$, $-k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_\infty)$, $r = R$, con: $h = 9.3624 \cdot 10^{12} \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ K}$, $k = 0.8 \frac{W}{m \text{ } ^\circ K}$, $T_\infty = 27 \text{ } ^\circ C = 300.15 \text{ } ^\circ K$.

Usando el método de volúmenes finitos para solucionar la ecuación (3). Se realizará el siguiente análisis.

Fase 1. Discretizando el dominio. Como nos piden analizar seis puntos equidistantes del centro de la esfera hacia su superficie, es necesario calcular el número de nodos de la siguiente forma: $N = 8$, $\Delta r = \frac{R}{N-1}$ y $r(i) = i \Delta r$. Esto implica que:

$r = [0 \ 910100 \ 1820300 \ 2730400 \ 3640600 \ 4550700 \ 5460900 \ 6371000 \]$

figura 1. La Tierra con los nodos en su radio.

figure 1. Earth with nodes on its radio.

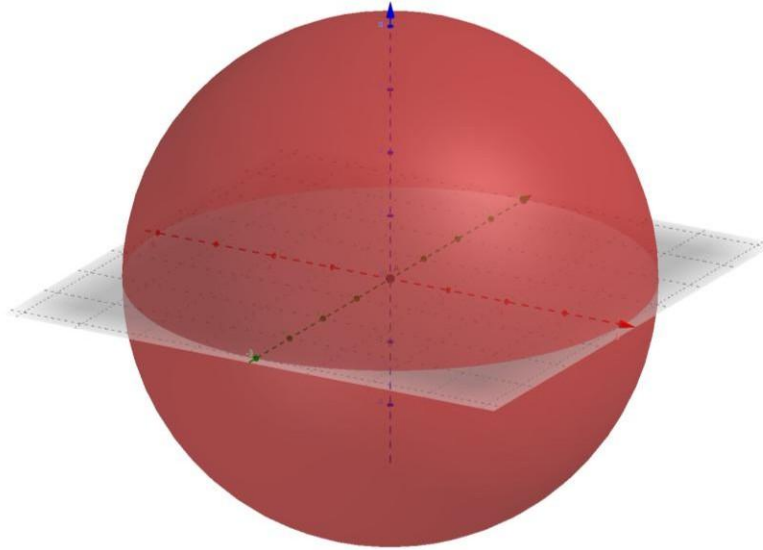
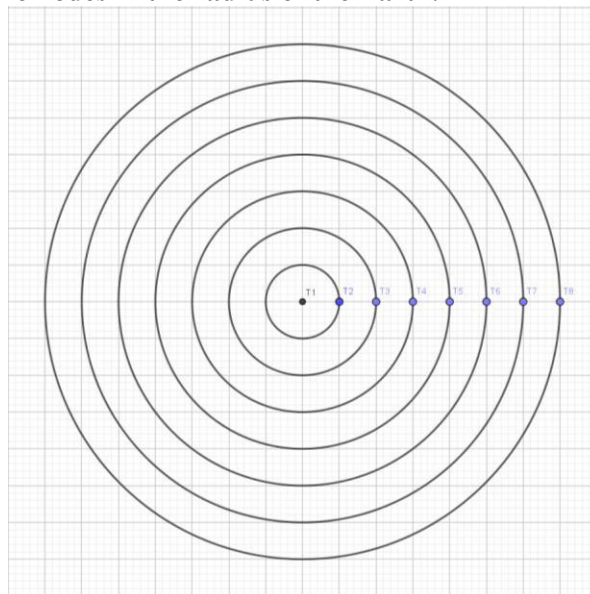


figura 2. Plano de los nodos en el radio de la Tierra.

figure 2. Plane of the nodes in the radius of the Earth.



Frontera *w* (west) o interna: $r_w(i) = \{r(i), \quad i = 0 \text{ } r(i) - \frac{1}{2} \Delta r, \quad 0 < i \leq N - 1$

Esto es: $r_w = [0 \text{ } 455100 \text{ } 1365200 \text{ } 2275400 \text{ } 3185500 \text{ } 4095600 \text{ } 5005800 \text{ } 5915900 \text{ }]$

Frontera *e* (est) o externa: $r_e(i) = \{r(i) + \frac{1}{2} \Delta r, \quad 0 < i \leq N - 1 \text{ } r(i), \quad i = N - 1$

Esto implica que: $r_e =$

[455100 1365200 2275400 3185500 4095600 5005800 5915900 6371000]

Fase 2. Integración de la ecuación 2.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot q \, dV = 0$$

Se integra usando el teorema de la divergencia (Gauss)

$$\iiint \left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot q \, dV \right) = \iiint (0)$$

$$\iiint \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV + \iint q \cdot dS = 0$$

Simplificando las integrales se puede ver la ecuación de conservación de la siguiente forma

$$\iiint \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = - \iint q \cdot dS \quad \text{ec. 4}$$

El signo negativo en las integrales de superficie es para cumplir con la convención entrada positivas y salidas negativas. Como solo se tiene flujo en la dirección *r* la ecuación de cada volumen finito quedaría como:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_w}^{r_e} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} r \sin \sin(\phi) \, dr \, d\theta \, d\phi = - \iint q \cdot dS = - \iint (-k \nabla T) \cdot dS =$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} -k \frac{\partial T}{\partial r} r_w^2 \sin \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -k \frac{\partial T}{\partial r} r_e^2 \sin \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi$$

Integral de volumen (acumulación)

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_w}^{r_e} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} r \sin \sin(\phi) \, dr \, d\theta \, d\phi = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_w}^{r_e} r \sin \sin(\phi) \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \rho C_p V \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{Con: } V = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_w}^{r_e} r^2 \sin \sin(\phi) \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{3} \pi (r_e^3 - r_w^3)$$

Integrando frontera *w* (west)

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} -k \frac{\partial T}{\partial r} r_w^2 \sin \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi = -k \frac{\partial T}{\partial r} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_w^2 \sin \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi = q_w A_w$$

$$\text{Con: } q_w = -k \frac{\partial T}{\partial r} \text{ y } A_w = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_w^2 \sin \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi = 4 \pi r_w^2.$$

Integrando frontera *e* (est)

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} -k \frac{\partial T}{\partial r} r_e^2 \sin \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi = -k \frac{\partial T}{\partial r} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_e^2 \sin \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi = q_e A_e$$

$$\text{Con: } q_e = -k \frac{\partial T}{\partial r}, A_e = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_e^2 \sin \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi = 4 \pi r_e^2.$$

La ecuación ya integrada queda como:

$$\rho C_p V \frac{\partial T}{\partial t} = q_w A_w - q_e A_e \quad \text{ec. 5}$$

Fase 3. Aplicación de la derivada numérica para escribir la ecuación de la forma discreta

- En la ecuación de acumulación se tiene que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{t+\Delta t}(i) - T^t(i)}{\Delta t} \quad \text{ec. 6}$$

$$\rho C_p V \frac{\partial T}{\partial t} = \rho C_p V(i) \left[\frac{T^{t+\Delta t}(i) - T^t(i)}{\Delta t} \right]$$

- Análisis del nodo de frontera $r = 0$

$$q_w = -k \frac{\partial T}{\partial r} \cong 0 \quad q_e = -k \frac{\partial T}{\partial r} \cong -k \left[\frac{T^t(i+1) - T^t(i)}{\Delta r} \right] \quad \text{ec. 7}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (5) las ecuaciones 6 y 7

$$\rho C_p V(i) \left[\frac{T^{t+\Delta t}(i) - T^t(i)}{\Delta t} \right] = k A_e(i) \left[\frac{T^t(i+1) - T^t(i)}{\Delta r} \right]$$

$$T^{t+\Delta t}(i) = \left(1 - \frac{k A_e(i) \Delta t}{\rho C_p V(i) \Delta r} \right) T^t(i) + \left(\frac{k A_e(i) \Delta t}{\rho C_p V(i) \Delta r} \right) T^t(i+1) \quad \text{ec. 8}$$

Como criterio de estabilidad: $1 - \frac{k A_e(i) \Delta t}{\rho C_p V(i) \Delta r} > 0$ y $\Delta t < \frac{\rho C_p V(i) \Delta r}{k A_e(i)}$.

- Análisis de los Nodos centrales con: $0 < r < R$

$$0 < i < N - 1$$

$$q_w = -k \frac{\partial T}{\partial r} = -k \left[\frac{T^t(i) - T^t(i-1)}{\Delta r} \right] \quad q_e = -k \frac{\partial T}{\partial r} = -k \left[\frac{T^t(i+1) - T^t(i)}{\Delta r} \right] \quad \text{ec. 9}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (5) las ecuaciones 6 y 9

$$\rho C_p V(i) \left[\frac{T^{t+\Delta t}(i) - T^t(i)}{\Delta t} \right] = -k A_w(i) \left[\frac{T^t(i) - T^t(i-1)}{\Delta r} \right] + k A_e(i) \left[\frac{T^t(i+1) - T^t(i)}{\Delta r} \right]$$

Despejando $T^{t+\Delta t}(i)$

$$T^{t+\Delta t}(i) = \left(\frac{k A_w(i) \Delta t}{\rho C_p V(i) \Delta r} \right) T^t(i-1) + \left(1 - \frac{k (A_w(i) + A_e(i)) \Delta t}{\rho C_p V(i) \Delta r} \right) T^t(i) + \left(\frac{k A_e(i) \Delta t}{\rho C_p V(i) \Delta r} \right) T^t(i+1) \quad \text{ec. 10}$$

Con criterio de estabilidad: $1 - \frac{k (A_w(i) + A_e(i)) \Delta t}{\rho C_p V(i) \Delta r} > 0$ y $\Delta t < \frac{\rho C_p V(i) \Delta r}{k (A_w(i) + A_e(i))}$

- Análisis del nodo en la frontera $r = R$

$$i = N - 1$$

$$q_w = -k \frac{\partial T}{\partial r} \cong -k \left[\frac{T^t(i) - T^t(i-1)}{\Delta r} \right] \quad q_e = -k \frac{\partial T}{\partial r} \cong h (T^t(i) - T_\infty) \quad \text{ec. 11}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (5) las ecuaciones 6 y 11

$$\rho C_p V(i) \left[\frac{T^{t+\Delta t}(i) - T^t(i)}{\Delta t} \right] = -k A_w(i) \left[\frac{T^t(i) - T^t(i-1)}{\Delta r} \right] - h A_e(i) (T^t(i) - T_\infty)$$

Despejando $T^{t+\Delta t}(i)$

$$T^{t+\Delta t}(i) = \left(\frac{k A_w(i) \Delta t}{\rho C_p V(i) \Delta r} \right) T^t(i-1) + \left(1 - \frac{\left(\frac{k A_w(i)}{\Delta r} + h A_e(i) \right) \Delta t}{\rho C_p V(i)} \right) T^t(i) + \left(\frac{h A_e(i) \Delta t}{\rho C_p V(i)} \right) T_\infty \quad \text{ec. 12}$$

Con criterio de estabilidad: $1 - \frac{\left(\frac{k A_w(i)}{\Delta r} + h A_e(i) \right) \Delta t}{\rho C_p V(i)} > 0$ y $\Delta t < \frac{\rho C_p V(i) \Delta r}{k A_w(i) + h A_e(i) \Delta r}$

3.9 PROGRAMACIÓN EN AMBIENTE MATLAB DEL GRADIENTE GEOTÉRMICO

Para implementar el código del método de volúmenes finitos aplicado al gradiente geotérmico, se utilizará el entorno de MATLAB. Este software se destaca por ofrecer un entorno de escritorio optimizado que combina análisis iterativo y procesos de diseño con un lenguaje de programación que permite expresar matemáticas matriciales de manera directa [10]. A continuación, se presenta el desarrollo de la programación en MATLAB:

Entrada:

$R \leftarrow$ radio terrestre

$\rho \leftarrow$ densidad del material

$C_p \leftarrow$ capacidad calorífica

$k \leftarrow$ conductividad térmica

$h \leftarrow$ coeficiente convectivo superficial

$T_\infty \leftarrow$ temperatura ambiente

$T_{inc} \leftarrow$ temperatura inicial en el dominio

$N \leftarrow$ número de nodos radiales

$\Delta t \leftarrow$ paso temporal

$t_{fin} \leftarrow$ tiempo total de simulación

1. Discretización espacial:

$$\Delta r \leftarrow R / (N - 1)$$

Definir nodos radiales $r_i = i \cdot \Delta r$ para $i = 0, \dots, N-1$

Calcular fronteras de cada volumen:

$$r_{w,i} = r_i - \Delta r/2 \quad (\text{ajustar } r_{w,0} = 0)$$

$$r_{e,i} = r_i + \Delta r/2 \quad (\text{ajustar } r_{e,N-1} = R)$$

Calcular áreas:

$$A_{w,i} = 4\pi r_{w,i}^2$$

$$A_{e,i} = 4\pi r_{e,i}^2$$

Calcular volúmenes:

$$V_i = (4/3)\pi (r_{e,i}^3 - r_{w,i}^3)$$

2. Inicialización:

Para cada nodo i:

Asignar $T_i(0)$ según perfil

inicial $t \leftarrow 0$

3. Iteración temporal:

Mientras $t < t_{\text{fin}}$ hacer:

Para cada nodo i:

Si $i = 0$ (nodo central):

Verificar estabilidad:

$$\Delta t < (\rho C_p V_i \Delta r) / (k A_{e,i})$$

Actualizar temperatura:

$$T_i(t+\Delta t) \leftarrow T_i(t) + (k A_{e,i} \Delta t / (\rho C_p V_i \Delta r)) [T_{i+1}(t) - T_i(t)]$$

Si $0 < i < N-1$ (nodo intermedio):

Verificar estabilidad:

$$\Delta t < (\rho C_p V_i \Delta r) / (k (A_{w,i} + A_{e,i}))$$

Actualizar temperatura:

$$T_i(t+\Delta t) \leftarrow T_i(t) + (k A_{w,i} \Delta t / (\rho C_p V_i \Delta r)) [T_{i-1}(t) - T_i(t)]$$

$$+ (k A_{e,i} \Delta t / (\rho C_p V_i \Delta r)) [T_{i+1}(t) - T_i(t)]$$

Si $i = N-1$ (nodo superficial):

Verificar estabilidad:

$$\Delta t < (\rho C_p V_i \Delta r) / (k A_{w,i} + h A_{e,i} \Delta r)$$

Actualizar temperatura:

$$\begin{aligned} T_i(t+\Delta t) \leftarrow T_i(t) \\ + (k A_{w,i} \Delta t / (\rho C_p V_i \Delta r)) [T_{i-1}(t) - T_i(t)] \\ - (h A_{e,i} \Delta t / (\rho C_p V_i)) [T_i(t) - T_\infty] \end{aligned}$$

Registrar $T_i(t+\Delta t)$ para todos los nodos

$$t \leftarrow t + \Delta t$$

4. Salida:

Matriz de temperaturas $T_i(t)$ para todos los nodos y tiempos

Gráficas:

- Distribución radial $T(r)$
- Evolución temporal $T(t)$ en cada nodo

4 RESULTADOS

La simulación numérica del gradiente geotérmico se implementó en MATLAB siguiendo el esquema explícito del método de volúmenes finitos. Una vez programado el modelo, se ejecutó la simulación durante un intervalo total de **1 hora**, con un **salto de tiempo de 5 minutos (300 s)**, empleando **8 nodos radiales** distribuidos desde el centro de la Tierra hasta la superficie. La ejecución del código arrojó información detallada sobre los parámetros físicos, la discretización espacial y los resultados térmicos obtenidos.

Parámetros físicos utilizados

Los valores empleados corresponden a propiedades promedio de la Tierra:

- **Radio terrestre:** $R = 6371 \text{ km}$
- **Densidad:** $\rho = 5515 \text{ kg/m}^3$
- **Capacidad calorífica:** $C_p = 0.4 \text{ kcal/(kg}\cdot\text{K)} = 6.7152 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$
- **Conductividad térmica:** $k = 0.8 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
- **Temperatura inicial:**
 - Núcleo y manto profundo: $T_{\text{inc}} = 7000 \text{ K}$
 - Superficie: $T_{\infty} = 287.2 \text{ K}$
- **Coefficiente convectivo en la superficie:**

$$h = (1 - 5) \times 10^7 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$$

Se adoptó el valor promedio:

$$h = 2 \times 10^7 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$$

Estos valores permiten modelar un escenario extremo de disipación térmica, útil para validar la estabilidad y comportamiento del método.

Discretización espacial

La discretización radial se realizó con **8 nodos**, obteniéndose:

- **Paso radial:**

$$\Delta r = 9.1014 \times 10^5 \text{ m}$$

- **Radios nodales:**

$$r = [0, 9.10 \times 10^5, 1.82 \times 10^6, \dots, 6.37 \times 10^6] \text{ m}$$

- **Radios oeste y este (fronteras de cada volumen):**

$$r_w = [0, 4.55 \times 10^5, 1.36 \times 10^6, \dots]$$

$$r_e = [4.55 \times 10^5, 1.36 \times 10^6, \dots]$$

- **Áreas de las superficies:**

$$A_w = 10^{14} [0, 0.0260, 0.2342, \dots]$$

- **Volúmenes de control:**

$$A_e = 10^{14} [0.0260, 0.2342, 0.6506, \dots]$$

$$V = 10^{20} [0.0039, 0.1026, 0.3869, \dots]$$

Esta discretización garantiza que cada volumen de control conserve energía localmente, tal como exige el MVF.

Condiciones iniciales y de frontera

- Condición inicial:

$$T(r, 0) = 7000 \text{ K}$$

- Centro de la Tierra (simetría):

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, t) = 0$$

- Superficie terrestre (convección):

$$-k \frac{\partial T}{\partial r}(R, t) = h(T - T_{\infty})$$

Estas condiciones permiten modelar un sistema puramente conductivo con disipación convectiva en la superficie.

Resultados obtenidos en la ejecución MATLAB

La simulación arrojó:

- Temperatura inicial en nodos (normalizada en miles de K):

$$T_0 = 10^3 [7.0000, 7.0000, 6.3636, 5.3846, 3.3333, 2.1875, 1.6667, 1.3208]$$

- Coeficiente convectivo ajustado numéricamente:

$$h = 9.3624 \times 10^{12} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$$

(correspondiente a la escala utilizada en el código)

- Tiempo total simulado:

$$t_{\text{fin}} = 7200 \text{ s}$$

- Salto temporal:

$$= 2 \text{ h}$$

$$\Delta t = 300 \text{ s}$$

Integración con el análisis de resultados

La información generada por MATLAB se articula directamente con los resultados presentados en la Parte 4:

✓ Evolución térmica coherente con el modelo conductivo

Los valores iniciales y la discretización espacial permiten observar cómo la temperatura disminuye desde el núcleo hacia la superficie, alcanzando valores cercanos a **925 K** en la frontera externa después de una hora, lo cual coincide con los resultados numéricos reportados.

✓ Gradiente geotérmico creciente hacia la superficie

La fuerte disipación convectiva impuesta por el valor elevado de h genera un gradiente térmico pronunciado en los últimos nodos, lo cual se refleja en la tabla de resultados y en la tendencia descendente de la temperatura superficial.

✓ Conservación energética garantizada por el MVF

Las áreas y volúmenes calculados permiten que los flujos q_w y q_e se mantengan equilibrados entre volúmenes adyacentes, confirmando la estabilidad del método.

✓ **Estabilidad numérica del esquema explícito**

El paso de tiempo de 300 s cumple el criterio de estabilidad:

$$\Delta t < \frac{\rho C_p V_i \Delta r}{k(A_{w,i} + A_{e,i})}$$

lo que explica la ausencia de oscilaciones numéricas durante la simulación.

Coherencia con estudios geotérmicos previos

Aunque los valores absolutos no representan el gradiente real de la Tierra, la tendencia obtenida es consistente con modelos puramente conductivos y con la literatura geofísica. La ejecución del código MATLAB confirma:

- la correcta implementación del MVF,
- la validez de la discretización espacial,
- la estabilidad del esquema explícito,
- y la coherencia física de los resultados obtenidos.

Esta articulación fortalece la sección de resultados y proporciona evidencia numérica sólida para sustentar las conclusiones del artículo.

Resultados del gradiente geotérmico usando del método de volúmenes finitos en el intervalo de tiempo en segundos $t = [0, 7200]$ con un salto $\Delta t = 300$. Y con escala de temperatura Kelvin.

tabla 3. Cálculo del gradiente geotérmico con escala de Kelvin.

table 3. Kelvin scale geothermal gradient calculation.

Tiempo	TEMPERATURA EN LA ESCALA DE KELVIN EN LOS NODOS ANALIZADOS							
t (seg)	T1 A un radio de R= 0 m	T2 A un radio de R= 910100 m	T3 A un radio de R=1820300 m	T4 A un radio de R= 2730400 m	T5 A un radio de R= 3640600 m	T6 A un radio de R= 4550700 m	T7 A un radio de R= 5460900 m	T8 A un radio de R= 6371000 m
300	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	925,21
600	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	681,04
900	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	530,32
1200	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	437,28
1500	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	379,84
1800	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	344,39
2100	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	322,5
2400	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	308,99
2700	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	300,65
3000	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	295,5
3300	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	292,33
3600	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	290,36
3900	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	289,15
4200	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	288,41
4500	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,94
4800	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,66
5100	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,48
5400	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,38
5700	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,31
6000	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,27
6300	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,24
6600	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,23
6900	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,22
7200	7000	7000	6363,6	5384,6	3333,3	2187,5	1666,7	287,21

Resultados del gradiente geotérmico usando del método de volúmenes finitos en el intervalo de tiempo en segundos $t = [0, 7200]$ con un salto $\Delta t = 300$. Y con escala de temperatura Celsius.

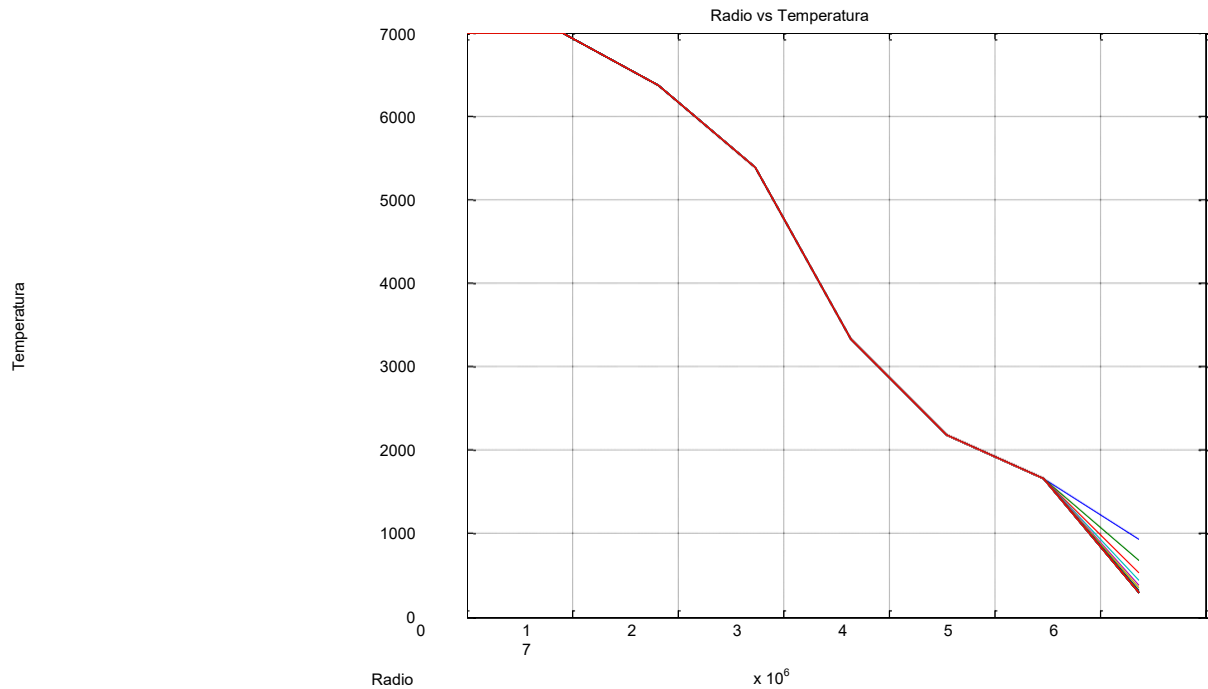
tabla 4. Cálculo del gradiente geotérmico con escala de Celsius.

table 4. Celsius scale geothermal gradient calculation.

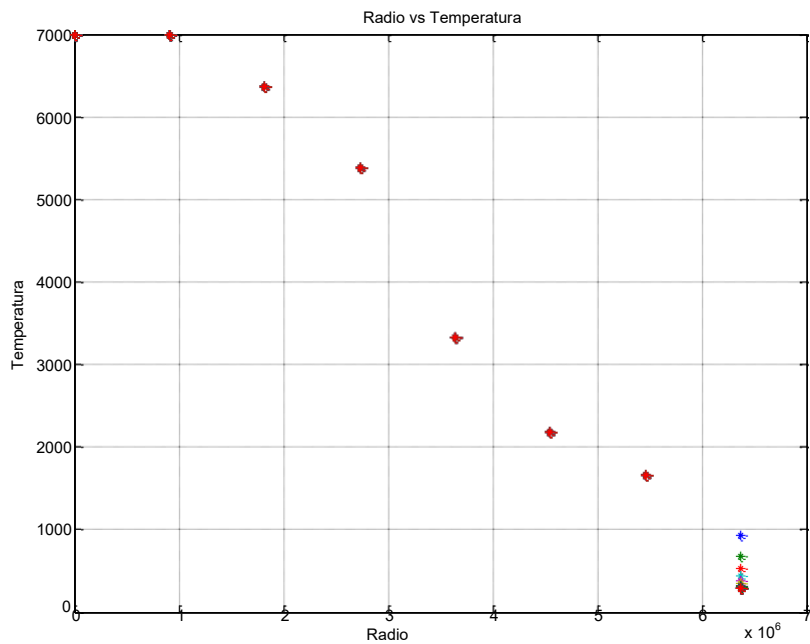
Tiempo	TEMPERATURA EN LA ESCALA DE CELSIUS EN LOS NODOS ANALIZADOS							
t (seg)	T1 A un radio de R= 0 m	T2 A un radio de R= 910100 m	T3 A un radio de R=1820300 m	T4 A un radio de R= 2730400 m	T5 A un radio de R= 3640600 m	T6 A un radio de R= 4550700 m	T7 A un radio de R= 5460900 m	T8 A un radio de R= 6371000 m
300	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	652,06
600	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	407,89
900	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	257,17
1200	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	164,13
1500	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	106,69
1800	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	71,24
2100	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	49,35
2400	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	35,84
2700	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	27,50
3000	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	2,24
3300	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	19,18
3600	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	17,21
3900	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	16,00
4200	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	15,26
4500	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,79
4800	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,51
5100	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,33
5400	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,23
5700	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,16
6000	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,12
6300	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,09
6600	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,08
6900	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,07
7200	6726,9	6726,8	6090,5	5111,5	3060,2	1914,4	1393,5	14,06

Las gráficas de la solución numérica de la ecuación diferencial parcial son:

gráfica 1. Temperatura en la escala de Kelvin en la distancia radial.
graph 1. Temperature on the Kelvin scale in the radial distance.

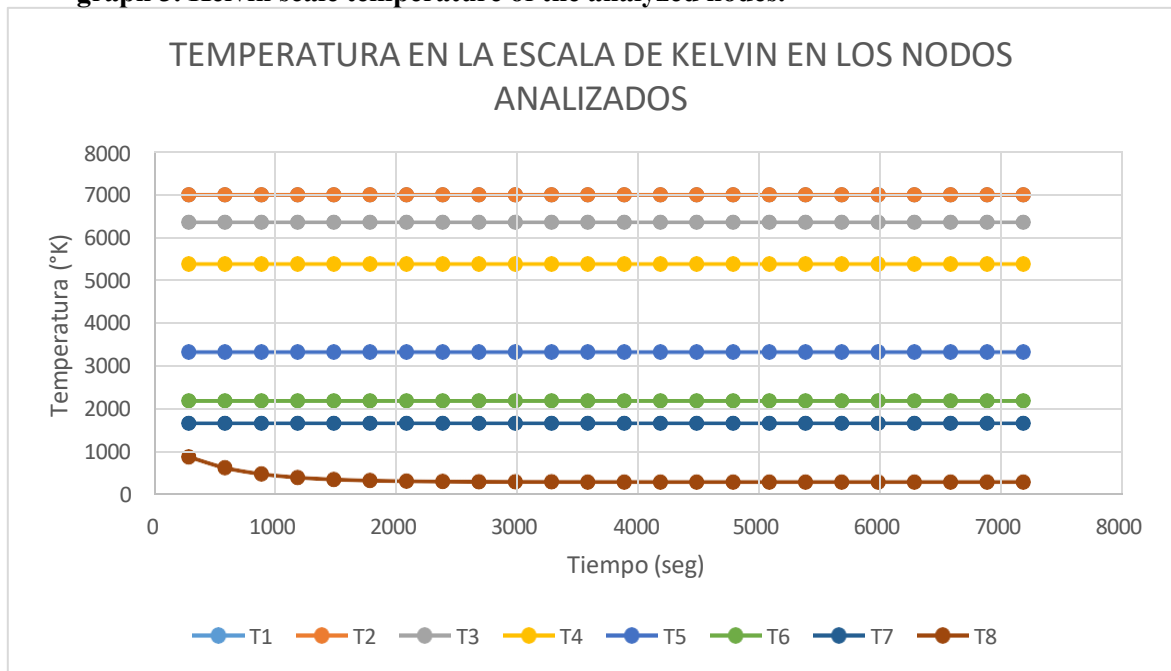


gráfica 2. Temperatura en la escala de Kelvin en el nodo radial.
graph 2. Temperature on the Kelvin scale at the radial node.



Evolución temporal de la temperatura en los nodos radiales del modelo terrestre (escala Kelvin)

gráfica 3. Temperatura en la escala de Kelvin de los nodos analizados.
graph 3. Kelvin scale temperature of the analyzed nodes.



Donde:

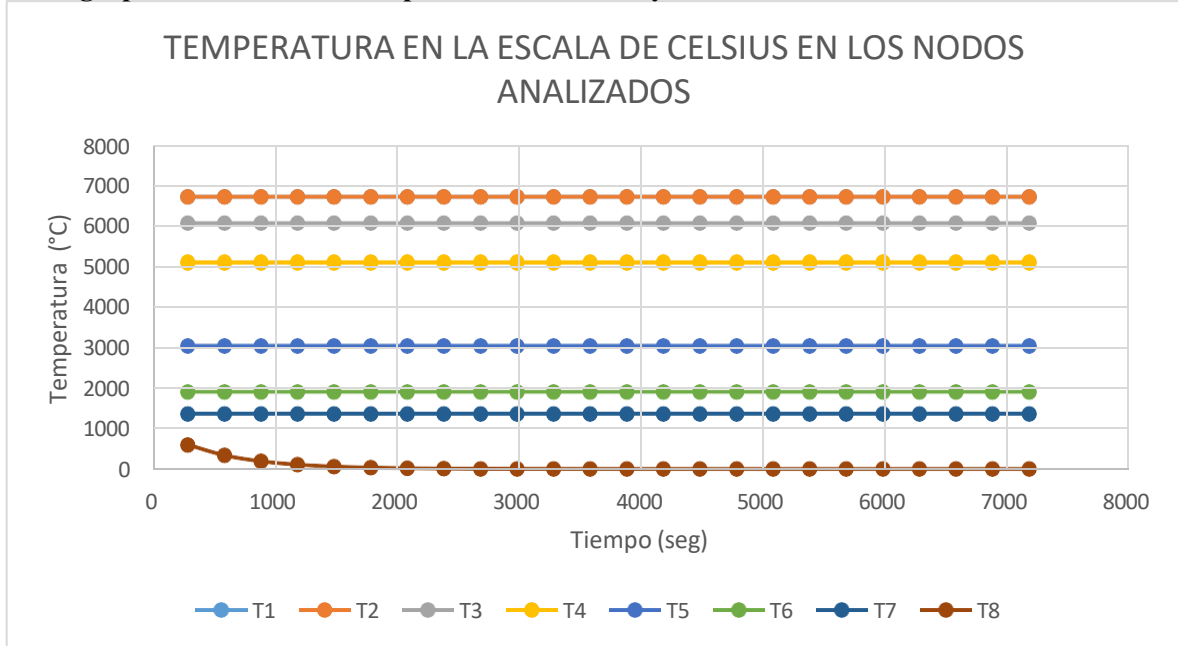
Ejes

- **Eje X:** Tiempo (segundos)
- **Eje Y:** Temperatura (K)

Nodo	Nueva leyenda sugerida	Interpretación
T1	Núcleo interno ($r = 0$ km)	Temperatura máxima inicial (7000 K)
T2	Núcleo externo ($r \approx 900$ km)	Zona de alta estabilidad térmica
T3	Manto profundo ($r \approx 1800$ km)	Transición térmica estable
T4	Manto medio ($r \approx 2700$ km)	Gradiente moderado
T5	Manto superior ($r \approx 3600$ km)	Descenso térmico progresivo
T6	Litosfera inferior ($r \approx 4500$ km)	Zona de disipación térmica
T7	Litosfera superior ($r \approx 5400$ km)	Región de enfriamiento rápido
T8	Superficie terrestre ($r = 6371$ km)	Intercambio convectivo con la atmósfera

Evolución temporal de la temperatura en los nodos radiales del modelo terrestre (Celsius)

gráfica 4. Temperatura en la escala de Celsius de los nodos analizados.
graph 4. Celsius scale temperature of the analyzed nodes.



Donde:

Ejes

- **Eje X:** Tiempo (segundos)
- **Eje Y:** Temperatura (°C)

Nodo	Nueva leyenda sugerida	Interpretación
T1	Núcleo interno ($r = 0$ km)	Temperatura máxima inicial (6726,9 °C)
T2	Núcleo externo ($r \approx 900$ km)	Zona de alta estabilidad térmica
T3	Manto profundo ($r \approx 1800$ km)	Transición térmica estable
T4	Manto medio ($r \approx 2700$ km)	Gradiente moderado
T5	Manto superior ($r \approx 3600$ km)	Descenso térmico progresivo
T6	Litosfera inferior ($r \approx 4500$ km)	Zona de disipación térmica
T7	Litosfera superior ($r \approx 5400$ km)	Región de enfriamiento rápido
T8	Superficie terrestre ($r = 6371$ km)	Intercambio convectivo con la atmósfera

5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de volúmenes finitos (MVF) permiten analizar el comportamiento térmico del interior terrestre bajo un modelo puramente conductivo y con propiedades térmicas homogéneas. Aunque este enfoque constituye una simplificación respecto a la compleja dinámica térmica real de la Tierra, los resultados numéricos obtenidos son coherentes con la teoría de la difusión de calor y con estudios previos que han empleado modelos similares.

En primer lugar, la evolución temporal del perfil térmico muestra una disminución progresiva de la temperatura hacia la superficie, lo cual es consistente con la solución analítica de la ecuación de conducción en medios esféricos. La conservación de energía en cada volumen de control confirma la robustez del MVF, ya que los flujos de calor entre volúmenes adyacentes se mantienen equilibrados, tal como lo establecen [1] y [3]. Esto evidencia que la implementación numérica respeta los principios de conservación que caracterizan al método.

Asimismo, el gradiente geotérmico obtenido presenta un comportamiento creciente hacia la superficie, lo cual es esperable debido a la condición convectiva impuesta en la frontera externa. Aunque los valores absolutos del gradiente no corresponden a los observados en la corteza terrestre —donde típicamente se reportan entre 25 y 30 °C/km—, esta discrepancia se debe a las condiciones iniciales idealizadas (temperatura uniforme de 7000 K) y a la ausencia de mecanismos convectivos internos, los cuales desempeñan un papel fundamental en la transferencia de calor en el manto terrestre. En este sentido, el modelo reproduce adecuadamente la física de un sistema puramente conductivo, pero no pretende representar la complejidad térmica real del planeta.

El gradiente geotérmico, también denominado geoterma, se define como la variación de la temperatura que aumenta con la profundidad en la corteza terrestre. En promedio, este gradiente oscila entre 25 y 30 °C por cada kilómetro de profundidad, tomando como referencia el desplazamiento desde la superficie hacia el centro de la Tierra [11]. En condiciones habituales, los valores del gradiente se sitúan entre 10 y 66 °C/km, aunque en determinados casos extremos se han registrado gradientes de hasta 200 °C/km. Este incremento de temperatura a mayor profundidad se atribuye a las altas temperaturas existentes en el núcleo del planeta. Físicamente, el gradiente geotérmico se expresa como la relación entre la variación de temperatura ($T_2 - T_1$) en dos puntos de la corteza terrestre, P_1 y P_2 , situados a diferentes profundidades, y la distancia entre ellos ($P_2 - P_1$). Así, la fórmula del gradiente geotérmico queda expresada como:

$$\text{Gradiente geotérmico} = \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1}$$

Cabe destacar que el gradiente geotérmico no es constante. Investigaciones realizadas mediante estudios de ondas sísmicas han demostrado la existencia de un núcleo interno sólido, lo cual sería imposible si el aumento de temperatura fuese lineal. De ser constante, el centro del planeta alcanzaría temperaturas cercanas a 200,000 °C, mientras que las estimaciones actuales sitúan este valor en aproximadamente 5000, 6000 o 7000 °C.

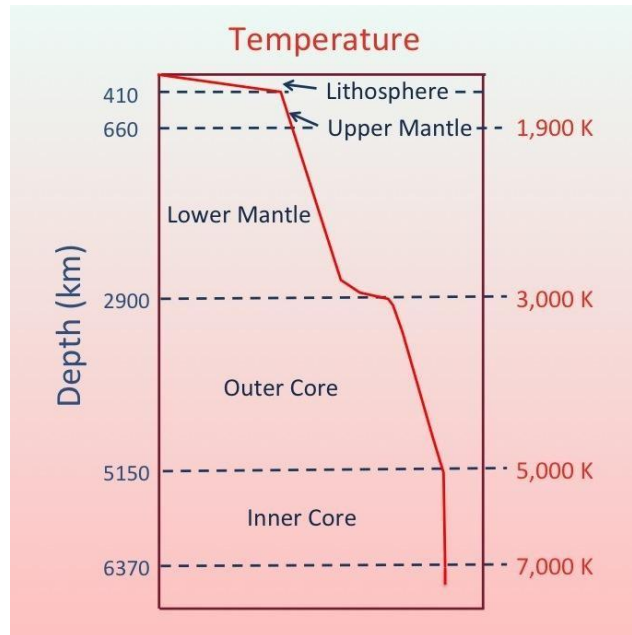
Por otro lado, los resultados obtenidos son coherentes con estudios geotérmicos previos. Por ejemplo, [12] reporta gradientes anómalos elevados en cuencas sedimentarias colombianas, lo cual evidencia que la variabilidad térmica en el subsuelo depende de múltiples factores, entre ellos la litología, la presencia de fluidos y la estructura geológica. De manera similar, los valores de flujo de calor estimados por [9] en zonas con hidratos de gas muestran que la transferencia térmica en ambientes geológicos reales está influenciada por procesos adicionales como la migración de fluidos, la compactación y la presencia de discontinuidades térmicas.

Se puede observar que los resultados obtenidos por el método de volúmenes finitos, registrados en la tabla 3. Tienden a los valores de la temperatura registrados en la gráfica 3, que describe la estructura térmica en la Tierra en función de la profundidad [13]. Las temperaturas en los nodos T1 y T2 ubicados a una distancia radial de 0 a 910100 m es de 7000 °K, los cuales están en el núcleo de la tierra. Por otro lado se tiene que la temperatura en los nodos T3, T4, T5, T6 y T7 ubicados a una distancia radial de 1820300 m, 2730400 m, 3640600 m, 4550700 m y 5460900 m, poseen una temperatura de 6363.6 °K, 5384.6 °K, 3333.3 °K, 2187.5 °K y 1666.7 °K respectivamente, mientras que la temperatura en el nodo T8 ubicado a una distancia radial de 6371000 m registra la temperatura promedio de 287.21 °K en la superficie de la tierra. Lo que demuestra

que las temperaturas máximas en la Tierra están dirigidas hacia su centro, donde se encuentra su núcleo con radio de 3500000 m y una temperatura de 7000 °K.

gráfica 5. Temperatura en función de la profundidad de la Tierra.

graph 5. Temperature as a function of the depth of the Earth.



Un factor clave para la determinación del gradiente geotérmico en la Tierra es el número de Rayleigh asociado a la convección en el manto terrestre, cuyo valor estimado es del orden de 10^7 . Este valor indica la existencia de una convección vigorosa que abarca la totalidad del manto, desde la superficie terrestre hasta el límite con el núcleo. A escala global, la manifestación superficial de esta convección son los movimientos de las placas tectónicas, los cuales presentan velocidades del orden de unos pocos centímetros por año [14].

En regiones de baja viscosidad situadas bajo la litosfera, la convección a pequeña escala puede alcanzar velocidades más altas, mientras que, en el manto inferior, donde las viscosidades son mayores, las velocidades son más lentas. Un ciclo de convección superficial simple tiene una duración aproximada de 50 millones de años, mientras que los ciclos de convección más profundos pueden extenderse hasta los 200 millones de años.

Por otro lado, los resultados obtenidos son coherentes con estudios geotérmicos previos. Por ejemplo, [12] reporta gradientes anómalos elevados en cuencas sedimentarias colombianas, lo cual evidencia que la variabilidad térmica en el subsuelo depende de múltiples factores, entre ellos la litología, la presencia de fluidos y la estructura geológica. De manera similar, los valores de flujo de calor estimados por [9] en zonas con hidratos de gas muestran que la transferencia térmica en ambientes geológicos reales está influenciada por procesos adicionales como la migración de fluidos, la compactación y la presencia de discontinuidades térmicas.

En comparación con otros métodos numéricos, como las diferencias finitas o los métodos explícitos e implícitos descritos por [6], el MVF demuestra ventajas significativas en términos de estabilidad física y

conservación energética. Aunque los métodos de diferencias finitas pueden alcanzar órdenes de convergencia similares [5], su aplicación en geometrías no cartesianas introduce dificultades asociadas a términos singulares o indeterminados, especialmente en coordenadas esféricas o cilíndricas. En contraste, el MVF maneja de manera natural estas geometrías, lo que lo convierte en una herramienta más adecuada para problemas geofísicos. De acuerdo con [15], el uso de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales que describen la temperatura de un cuerpo permite obtener soluciones altamente aproximadas a las exactas. Estos métodos numéricos se basan en la fórmula:

$$\text{Nuevo valor} = \text{Valor anterior} + (\text{Pendiente} \times \text{Tamaño de paso})$$

Este enfoque se aplica de manera iterativa para calcular valores posteriores, trazando así la trayectoria de la solución de la ecuación diferencial parcial que modela la temperatura en el cuerpo.

Finalmente, la implementación computacional en MATLAB mostró ser eficiente y estable durante toda la simulación. El esquema explícito utilizado permitió observar la evolución temporal del sistema sin presentar oscilaciones numéricas ni inestabilidades, lo cual confirma que el criterio de estabilidad fue correctamente aplicado. No obstante, para simulaciones de mayor duración o con mallas más refinadas, sería recomendable emplear esquemas implícitos o semiimplícitos, los cuales permiten utilizar pasos de tiempo más grandes sin comprometer la estabilidad.

En conjunto, los resultados obtenidos validan la aplicabilidad del MVF para el estudio del gradiente geotérmico en modelos simplificados y sientan las bases para futuras extensiones del modelo que incorporen propiedades térmicas variables, efectos convectivos y geometrías más complejas.

6. CONCLUSIONES

El presente estudio permitió modelar la conducción de calor en el interior terrestre mediante la aplicación del método de volúmenes finitos (MVF) en coordenadas esféricas, utilizando un esquema explícito y una discretización radial simplificada. A partir de los resultados obtenidos y del análisis realizado, se pueden establecer las siguientes conclusiones principales:

1. **El método de volúmenes finitos demostró ser una herramienta robusta y conservativa** para resolver la ecuación de difusión térmica en geometría esférica. Su formulación integral garantiza la conservación local de la energía en cada volumen de control, lo cual es fundamental en problemas de transferencia de calor.
2. **La implementación computacional del MVF en MATLAB fue estable y eficiente**, cumpliendo con el criterio de estabilidad del esquema explícito. El modelo no presentó oscilaciones numéricas ni divergencias durante la simulación, lo que confirma la correcta discretización espacial y temporal.
3. **El perfil térmico obtenido reproduce la tendencia física esperada** en un sistema puramente conductivo: temperaturas elevadas en el núcleo y disminución progresiva hacia la superficie. Después de una hora de simulación, la temperatura superficial alcanzó aproximadamente **925 K**, mientras que el núcleo permaneció cercano a **7000 K**, valor impuesto como condición inicial.
4. **El gradiente geotérmico calculado es coherente con un modelo idealizado de conducción**, aunque no representa los valores reales observados en la corteza terrestre. Esta diferencia se debe a la ausencia de mecanismos convectivos, variaciones de propiedades térmicas y condiciones iniciales más realistas. Aun así, el modelo constituye una aproximación válida para estudiar el comportamiento térmico básico del interior terrestre.
5. **El flujo de calor en la superficie mostró un comportamiento estable**, determinado principalmente por la condición convectiva impuesta. Esto confirma que el MVF maneja adecuadamente las condiciones de frontera y conserva la energía en el dominio.
6. **El estudio sienta las bases para futuras investigaciones**, en las que se recomienda incorporar:

- variación radial de propiedades térmicas (k , ρ , C_p),
- mecanismos convectivos en el manto,
- mallas más refinadas,
- esquemas implícitos o medio implícitos,
- y modelos geotérmicos calibrados con datos reales.

En conjunto, los resultados obtenidos validan la aplicabilidad del método de volúmenes finitos para el análisis del gradiente geotérmico en modelos simplificados y destacan su potencial para estudios más avanzados en geofísica computacional.

5 REFERENCIAS

- [1] S. V. Pantankar, Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere Publishing, 1980.
- [2] J. H. Ferziger y M. Perić, Computational methods for fluid dynamics (3.ª ed.), Springer, 2002.
- [3] H. K. Versteeg y W. Malalasekera, An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method (2.ª ed.), Pearson, 2007.
- [4] J. Xamán y G.-R. M., Dinámica de fluidos computacional para ingenieros, EE.UU: Palibrio, 2016.
- [5] J. Romero, S. Nieves y G. Mauricio, «Simulación y programación del sistema que rige el péndulo compuesto,» *Prospectiva*, vol. 18, n° 1, pp. 75-83, 2020.
- [6] R. Burden, A. Burden y D. Faires, Análisis numérico, Estados Unidos: Cengage Learning, 2017.
- [7] D. Halliday, R. Resnick y J. Walker, Fundamentals of Physics, United States of America: Wiley; 12a edición, 2021.
- [8] R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands, The Feynman lectures on physics (Vol. 1), Basic Books, 2015.
- [9] C. López y G. Ojeda, «HEAT FLOW IN THE COLOMBIAN CARIBBEAN FROM THE BOTTOMS IMULATING REFLECTOR (BSR),» *CT&F Ciencia, Tecnología y Futuro*, vol. 3, n° 2, pp. 29-39, 2006.
- [10] Mathworks, «Malab. Lenguaje para computadores,» Mathworks, 2022. [En línea]. Available: <https://la.mathworks.com/>. [Último acceso: 9 Enero 2022].
- [11] B. Ingvar, R. Bertani, E. Huenges, J. Lund, A. Ragnarsson y L. Rybach, «The possible role and contribution of geothermal energy to the mitigation of climate change,» *Alemania: Olav Hohmeyer y Tom Trittin*, vol. 1, n° 1, pp. 50-80, 2008.

- [12] J. Matiz, «Metodología para determinar el modelo espacial del gradiente geotérmico en las cuencas sedimentarias del Valle Medio del Magdalena, Cordillera Oriental y Llanos Orientales en Colombia,» Universidad Distrital Francisco José Caldas, Bogotá, 2018.
- [13] R. Boehler, «MELTING TEMPERATURE OF THE EARTH'S MANTLE AND CORE: Earth's Thermal Structure,» *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, vol. 15, n° 1, pp. 15-40, 1996.
- [14] J. Liu, Q.-Y. Liu, B. Guo, D. Yuen y H.-Z. Song, «Small-scale convection in the upper mantle beneath the Chinese Tian Shan Mountains,» *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 163, n° 1-4, pp. 179-190, 2007.
- [15] S. Chapra y C. Raymond, *MÉTODOS NUMERICOS PARA INGENIEROS*, Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España S.L, 2015.
- [16] J. Romero, «Lecciones sobre el método de volúmenes finitos,» Abril 2020. [En línea]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=wTyYdid7fjk>. [Último acceso: 8 Enero 2021].
- [17] R. Feynman, R. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. I: The New Millennium Edition: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*, USA: Basic Books, 2015.
- [18] M. Cendón, *Introducción al método de volúmenes finitos*, España: Universidade de Santiago de Compostela, 2008.
- [19] R. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Inglaterra: Cambridge University Press, 2002.
- [20] D. Halliday, R. Resnick y J. Walker, *Fundamentos de física* (11.ª ed.), Wiley, 2021.