Análisis de la conjetura de goldbach

Analysis of goldbach's conjecture

Julio Cesar Romero Pabón[1], Gabriel Mauricio Vergara Ríos[2], Sergio Samuel Nieves Vanegas[3]

1Lic. Matemáticas y Física, Magister en Matemáticas Aplicadas, Doctor en Ciencias de la Educación Mención Matemáticas, Universidad del Atlántico. Barranquilla. Colombia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1620-9223. Email: julioromero@mail.uniatlantico.edu.co
2 Lic. Matemáticas y Física, Magister en Matemáticas, Doctor en Ciencias de la Educación Mención Matemáticas, Universidad del Atlántico. Barranquilla. Colombia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4349-9505. Email: gabrielvergara@mail.uniatlantico.edu.co
3 Lic. Matemáticas y Física, Magister en Estadística Aplicada, Doctor En Ciencias Mención Gerencia, Universidad Autónoma del Caribe. Barranquilla. Colombia.
ORCID: https://orcid.org/ 0000-0001-5000-0445. Email: Sergio.nieves@uace.edu.co

Cite this article as: J. Romero, G. Vargas, S.Nieves
"Análisis de la conjetura de Goldbach",
Prospectiva, Vol. 22 N° 1 2024.

Recibido: 22/08/2023 / Aceptado: 05/02/2024
http://doi.org/ 10.15665/rp.v22i1.3318

RESUMEN

En este trabajo se presenta una demostración de las conjeturas de Goldbach, la fuerte como la débil, las cuales afirman que: "Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos" y que "Todo número impar mayor que 5 puede escribirse como la suma de tres números primos". Para realizar estas demostraciones se analizó inicialmente todas las combinaciones para obtener los números pare e impares generados al sumar respectivamente dos o tres números primos. Al final se obtuvieron dos relaciones matemáticas muy relevantes, demostradas por el método de inducción matemática, que permite verificar la validez de estas conjeturas.

Palabras clave*: números primos, conjetura de Goldbach, matriz de números primos, números pares, números impares.*

ABSTRACT

This paper presents a proof of Goldbach's conjectures, both strong and weak, which state that: "Every even number greater than 2 can be written as the sum of two prime numbers" and that "Every odd number greater than 5 can be written as the sum of three prime numbers. To carry out these demonstrations, all the combinations were initially analyzed to obtain the even and odd numbers generated by adding two or three prime numbers, respectively. In the end, two very revealing mathematical relationships were obtained, demonstrated by the method of mathematical induction, which allows verifying the validity of these conjectures.

Keywords: *prime numbers, Goldbach's conjecture, matrix of prime numbers, even numbers, odd numbers.*

1. INTRODUCCIÓN

En actualidad los números primos son considerados como un tema de mucha importancia, tanto para las matemáticas como para las otras ciencias, por sus múltiples aplicaciones. Uno de los impulsos que ayudó a estudiar estos números primos se da en el momento histórico en querer resolver un problema que inició con una conjetura propuesta por Goldbach, quien la expresó través de una carta enviada a Euler en 1742. Donde planteaba el problema de siguiente manera: "Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos". Este enunciado que parece sencillo ha resultado ser un gran reto no solo por su demostración sino también por la comprobación.

El matemático Euler no logró demostrar ni refutar este enunciado. Desde entonces se convirtió en un problema abierto en matemáticas, el cual fue propuesto por G.H. Hardy, en 1921, ante la Sociedad Matemática de Copenhague. Allí se comentó que probablemente la conjetura de Goldbach no solo era uno de los problemas no resueltos más difíciles de la teoría de números, sino de las matemáticas. Desde entonces se ha venido estudiando este problema, sin llegar aún a una conclusión o demostración final, por lo que es importante realizar una demostración formal, como la que se propone en este trabajo, la cual permita evidenciar significativamente la comprobación y veracidad de dicha conjetura.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS SOBRE LOS NÚMEROS PRIMOS

El matemático Christian Goldbach (1690 – 1764) en una carta dirigida al ilustre compañero Euler en 1742, le comentaba que había observado que todo número par mayor que 2 podía escribirse como la suma de dos números primos. Además, que todo número impar mayor que 5 podía escribirse como la suma de tres números primos. Es aquí donde surgen estas grandes conjeturas. La conjetura de Goldbach, conocida también como la conjetura fuerte de Goldbach dice que: "todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos".

En la actualidad, la demostración de esta conjetura es considerada uno de los problemas más difíciles para resolver de las matemáticas. Sin embargo, muchos estudiosos no logran comprender como es que un problema con enunciado tan sencillo no se haya podido resolver aún. Como se expresó antes, a la fecha, la Conjetura de Goldbach no se ha podido demostrar, pero con la ayuda de los ordenadores se ha verificado que esta es cierta para todos los números pares menores que , pero esto no valida que sea cierta en términos generales, ya que, hay infinitos números pares mayores que el número máximo que tomó en el ordenador para verificar dicha conjetura [1]. Es importante resaltar que a la búsqueda de solución de este problema se le ha hecho mucha publicidad. Es así como en el año 2000 se presentó una novela de televisión titulada "El tío Petros y la conjetura de Goldbach" del autor griego Apostolos Diosiadis, donde una de sus tramas principales era la conjetura de Goldbach. Además, la Editorial Faber and Faber, la promocionó ofreciendo como premio un millón de dólares para el que la lograrà resolver antes de abril de 2002, pero nadie reclamo dicho premio.

Por otro lado, la conjetura débil de Goldbach dice que "todo número impar mayor que 5 se puede escribir como la suma de tres números primos". A esta conjetura se le conoce con el nombre de conjetura débil porque si se resuelve la conjetura fuerte, está también quedaría resuelta.

2.1 **Definición de números primos**

Según [2], los números primos parecen cosas muy simples, ya que son usados por todos para multiplicar números enteros. Pero sin embargo los números primos son los bloques constituyentes básicos de los números naturales y aparecen en todas las matemáticas. Son muy misteriosos, y parecen distribuirse prácticamente al azar. No hay duda de que los primos son un enigma. Quizás esto es una consecuencia de su definición, por lo que es necesario entender los primos, para desentrañar sus grandes secretos y fortalezas en el mundo de las matemáticas.

Durante miles de años los matemáticos se han encargado de mejorar significativamente el análisis y comprensión de los números primos, y como consecuencia de esto, han resuelto diversos problemas asociados a estos. Sin embargo, aún quedan muchos problemas e interrogantes por resolver. Según [2], existen problemas matemáticos de gran importancia como lo son el último teorema de Fermat o la conjetura de Goldbach, los cuales son considerados como los enigmas que juegan un papel muy importante en las bases de las matemáticas. En el libro titulado "Los grandes problemas matemáticos" Stewart, explica cuáles son estos problemas, su importancia, así como lo que impulsa a los matemáticos a retos increíbles para resolverlos, además de proyectar su situación en el contexto de las matemáticas y las ciencias en general. Este trabajo realizado por Stewart es una guía ideal en este mundo misterioso y emocionante, que muestra cómo los matemáticos modernos se enfrentan a los retos establecidos por sus predecesores. Según [3] el estudio de los números primos ha tenido varios enfoques o técnicas. Por ejemplo, el procedimiento de tamiz aplicado por Eratóstenes [4], trabajo que ha iluminado algunos métodos modernos sobre el cribado [5], a la migración del análisis al campo de su distribución, propuesto por Gauss [6]. Muchas conjeturas, postulados y teoremas en teoría de números están fundamentado en el supuesto de que la hipótesis de Riemann, relacionada con números primos, es cierto. Por cierto, que la prueba de la hipótesis de Riemann da la idea de que existe un patrón oculto en la distribución de números primos. Estos patrones han sido analizados utilizando aplicaciones dinámicas [7]. Hoy en día se han aplicado sistemas físicos con el análisis de los números primos, como por ejemplo al analizar el espectro de valores propios de números aleatorios se emplearon matrices, comúnmente utilizadas para analizar el caos cuántico [8].

En este trabajo se presentado por [9], se hace un estudio de los números primos de un conjunto de números comprendidos de 1 al 100.000.000, el cual es una cantidad de números primos grandemente estimado, en su análisis presenta una cantidad de números primos que concurren en determinado intervalo de números, su organización, clasificación y diferencias que coexisten entre ellos. Es importante resaltar que los números primos en la actualidad son altamente estudiados, pues tienen muchos usos, uno de ellos es el de emplearse para codificar cualquier tipo de información de forma segura, puesto que estos números se caracterizan por ser únicos y no se ajustan a ninguna regla o patrón para construirlos.

Definición de un número primo: Es importante resaltar que un entero n se llama primo si $n>1$ y si los únicos divisores positivos de n son 1 y n. Si $n>1$ y no es primo, entonces n se llama compuesto [10]. En las notaciones para representar los números primos usualmente se usan las siguientes letras: p,p^',p_i,q,q^',q_i.

Teorema 1. Cada entero $n>1$ es primo o producto de números primos.

Demostración: Procederemos por inducción sobre n. El resultado es cierto cuando $n=2$. Supondremos ahora que el resultado es cierto para cada entero mayor que 2 y menor que n (Hipótesis Inductiva). Si n es primo, se tiene el resultado. Si, por el contrario, n no es primo, entonces tiene un divisor $d\neq 1$, $d\neq n$. Por lo tanto $n=c\,d$, donde $c\neq n$ y tanto c como d son mayores que 1 y menores que n; la hipótesis inductiva aplicada a c y d conlleva a que cada uno de ellos es producto de primos, consecuentemente, n también lo será.

Teorema 2. Existe una infinidad de números primos.

Demostración de Euclides: Supondremos que sólo existe un número finito de primos, digamos que estos son p_1,p_2,…,p_n. Sea N=1+p_1 p_2… p_n. De la definición de N, es claro que N>1 y que N>p_i para todo i; por lo que N no es primo. Por el Teorema 1 N es producto de primos. Afirmamos que ningún p_i divide a N, ya que si p_i/N para algún i entonces p_i divide la diferencia N-p_1 p_2… p_n=1, es decir p_i/1, lo cual es imposible por ser p_i un primo.

Teorema 3. Si un primo p no divide a a, entonces (p,a)=1.

Demostración: Si (p,a)=d>1. Entonces d/p, y como p es primo entonces d=1 o d=p. Pero d/a luego d≠p puesto que p no divide a a. En consecuencia d=1, lo que contradice el hecho que d>1.

Teorema 4. Si un primo p divide a ab, entonces p/a o p/b. En general, si un primo p divide a un producto finito a_1.a_2…a_n, entonces p divide a por lo menos uno de los factores.

Demostración: Suponemos que p/ab y que p (no /) a. Veremos que p/b. Por el Teorema 3, (p,a)=1, luego por el Lema de Euclides, p\b.

Para demostrar la afirmación más general se procede por inducción sobre el número de factores n. Los detalles de esta se dejan al lector.

Teorema 5. Teorema fundamental de la Aritmética. Cada entero n>1 se puede representar como un producto de factores primos de forma única, salvo el orden de los factores.

Demostración: Procederemos por inducción sobre n. El teorema es verdadero para n=2. Supondremos, entonces, que es verdadero para todo entero mayor que 2 y menor que n (Hipótesis Inductiva). Probaremos que es verdadero también para n. Si n es primo no hay que probar nada. Por lo tanto, supondremos que n es compuesto y admite dos descomposiciones, que son

n= p_1 p_2...p_s=q_1 q_2...q_t

Queremos demostrar que s=t y que cada p es igual a algún q. Dado que p_1 divide al producto q_1 q_2⋯q_t debe dividir a uno, por lo menos, de los factores. Ordenaremos los q_1 〖,q〗_(2,)...,q_t de forma que p_1/q_1. Entonces p_1=q_1 ya que p_1 y q_1 son primos. Entonces n= p_1 p_2...p_s=q_1 q_2...q_t Podemos dividir por p_1 obteniendo

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_t$$

Si s>t o t>1, entonces 1<n/p_1 <n . La hipótesis de inducción nos dice que las dos descomposiciones de n/p_1 son idénticas, si prescindimos del orden de los factores. Por consiguiente s=t y las descomposiciones de n= p_1 p_2...p_s=q_1 q_2...q_t son también idénticas, si prescindimos del orden de los factores. Esto completa la demostración.

El Pequeño Teorema de Fermat

En una carta a Bernard Frenicle de Bessy in 1640, el gran teórico de los números francés Pierre de Fermat propuso el siguiente teorema, en realidad no era un teorema propiamente dicho sino más bien una conjetura, [11].

"Si p es un número primo, entonces para cada número a el número a^p-a es divisible en p ".

Demostración:

1) Sea p un número primo: Si a=0 → 0^p-0=0 divisible en p. Si a=1 → 1^p-1=0 divisible en p

2) Suponemos que si para todos los valores positivos de a tenemos que a^p-a es divisible en p por inducción matemática la hipótesis es válida también para a+1, entonces tenemos que: a^p-a es divisible en p, (a+1)^p-(a+1) es divisible en p. Por Teorema del Binomio sabemos que:

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} a + 1$$

Hacemos pasaje de términos y obtenemos:

$$(a+1)^p - a^p - 1 = \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} a$$
$$(a+1)^p - (a^p + 1) = \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} a \quad (1)$$

En el lado derecho de la ecuación (1) encontramos que cada coeficiente $\binom{p}{k}$ con k=1,2,3,...,p-1 es divisible en p. Por la propia definición de $\binom{p}{k}$ tenemos que: ($\binom{p}{k}$ k!=p(p-1)(p-2)...(p-k-1) aquí p divide la parte derecha de la ecuación. Para todos los coeficientes de la expresión, k es un valor menor a p, entoces el factor primo p no ocurre en el producto k!, por lo tanto p divide a $\binom{p}{k}$. Entonces como p divide a cada coeficiente del lado derecho de la ecuación (1), debe dividir también a la expresión completa del lado derecho y consecuentemente divide también el lado izquierdo (a+1)^p-(a^p+1).

A partir de la hipótesis inductiva que p divide a a^p-a, tenemos que:

$$[(a+1)^p - a^p - 1] + [a^p - a] = (a+1)^p - a^p - 1 + a^p - a$$
$$[(a+1)^p - a^p - 1] + [a^p - a] = (a+1)^p - (a+a)$$

Por lo tanto, por inducción matemática la hipótesis es válida para todos los valores positivos de a.

3) La demostración se completa considerando los valores negativos de a. Entonces definimos a los valores negativos de a como -a.

- Si p es igual a 2, tenemos que: $(-a)^p - (-a) = (-a)^p + a = a^2 + a = a(a+1)$. Los factores a y (a + 1) son consecutivos, entonces uno de ellos es par y su producto divisible en 2.
- Si p es impar: $(-a)^p - (-a) = -a^p + a = -(a^p - a)$. Sabemos que si a es positivo divide a $(a^p - a)$, por lo tanto, también divide a $-(a^p - a)$.

Según [12], es importante verificar que los resultados obtenidos cumplen con los criterios de congruencia o familia de congruencias dependiendo de d se cumple para (casi) todos los valores primos de d (o alguna expresión dependiente de d) y no se cumple en general para valores compuestos de d, a continuación se enuncian teoremas de congruencia clásicos y famosos de este tipo:

- Si d es un número primo, entonces $a^d \equiv a \pmod d$ para cada $a \in Z$ (pequeño de Fermat teorema).
- d es un número primo si y solo si si $(d-1)! \equiv -1 \pmod d$ (teorema de Wilson).
- Si d es un número primo mayor que 3, entonces $\binom{2d-1}{d-1} \equiv 1\ (mod\ d^3)$ (Wolstenholme teorema, para sus variaciones ver [13], [14], [15], [16].
- Si d es un número primo, entonces para cualquier $m, n \in N$ tenemos: $\binom{m}{n} \equiv \prod_{j=0}^{k} \binom{m_j}{n_j}\ (mod\ d)$, donde $m = \sum_{j=0}^{k} m_j\ d^j$ y $n = \sum_{j=0}^{k} n_j\ d^j$, (teorema de Lucas, para sus generalizaciones ver [17], [18], [19], [20], [21].

3. RESULTADOS DEL ANÁLISIS Y DEMOSTRACIÓN DE LA CONJETURA DE GOLDBACH.

3.1 OBTENCIÓN DE LOS NÚMEROS PARES A PARTIR DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS PRIMOS.

La Conjetura fuerte de Goldbach: "Todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos".

Demostración: Primero se encuentran los números primos y se ordenan de menor a mayor, , donde:

Posición (	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…	n	…
Número primo ()	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	…		…
Diferencia		1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	…		…

Se encuentran todas las combinaciones resultantes de sumar dos números primos. Para ello se construye una matriz M cuadrada de $(n \times n)$ de la siguiente forma:

$$M = \begin{cases} p_i + p_j & si \quad (i \leq j) \wedge \ mod\big((p_i + p_j),2\big) = 0 \\ 1 & para\ cualquier\ otro\ valor\ de\ \ p_i + p_j \end{cases} \qquad (1)$$

Con $i, j \in N$ que representan las filas y columnas de la Matriz M. Esto implica que la matriz tiene forma de:

$+$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	$\cdots$	p_n	$\cdots$
p_1	m_{11}	1	1	1	1	1	1	1		1	$\cdots$
p_2	1	m_{22}	m_{23}	m_{24}	m_{25}	m_{26}	m_{27}	m_{28}	$\cdots$	$m_{2n}\cdots$	
p_3	1	1	m_{33}	m_{34}	m_{35}	m_{36}	m_{37}	m_{38}	$\cdots$	$m_{3n}\cdots$	
p_4	1	1	1	m_{44}	m_{45}	m_{46}	m_{47}	m_{48}	$\cdots$	$m_{4n}\cdots$	
p_5	1	1	1	1	m_{55}	m_{56}	m_{57}	m_{58}	$\cdots$	$m_{5n}\cdots$	
p_6	1	1	1	1	1	m_{66}	m_{67}	m_{68}	$\cdots$	$m_{6n}\cdots$	
p_7	1	1	1	1	1	1	m_{77}	m_{78}	$\cdots$	$m_{7n}\cdots$	
p_8	1	1	1	1	1	1	1	m_{88}	$\cdots$	$m_{8n}\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
p_n	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$	$m_{in}\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

Donde $m_{11} = p_1 + p_1$, $m_{12} = p_1 + p_2$, $m_{13} = p_1 + p_3$, ... $m_{nn} = p_n + p_n = 2p_n$ ... y así sucesivamente hasta llegar al elemento final de la matriz. Se puede observar que la matriz M, contiene todos los números pares que se generan al sumar dos números primos, Estadísticamente según [22] se genera una cantidad de números pares igual a:

$$Números\ pares\ generados = 1 + C(n,r) = 1 + \frac{n!}{(n-r)!\ r!} \qquad (2)$$

Donde n son los números primos utilizados y r es 2, por tomarse la suma de dos números primos seleccionados.

Para encontrar cualquier número par en la matriz M, procedemos de la siguiente manera: se escribe el número par (x), lo dividimos entre dos $(\frac{x}{2})$, luego se busca el número primo (p_n) con la condición de que $\frac{x}{2} < p_n$. Una vez obtenido el número primo p_n, se ubica en la columna de la matriz M. El número x se encontrará en esa columna o en las siguientes que inicien con un número par menor que x.

Es importante resaltar que la matriz M, tiene todas diferencias entre dos números primos consecutivos, es decir: $|p_n - p_{n-1}|$,, esta diferencia puede se *1, 2, 4, 6, 8… 2n*. Lo que garantiza encontrar todos los números pares que poseen dicha diferencia. Basándose en los resultados de la matriz M, que contiene todos los números pares generados al sumar dos números primos, se puede calcular el producto de cada uno de los elementos, esto es:

$$Pm = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} m_{ij}\right) \qquad (3)$$

$$Pm = (m_{11}\, m_{21}\, m_{31} \dots)(m_{12}\, m_{22}\, m_{32} \dots)(m_{13}\, m_{23}\, m_{33} \dots) \dots$$

Esto implica que: $Pm = m_{11}\, m_{21}\, m_{31} \dots m_{12}\, m_{22}\, m_{32} \dots m_{13}\, m_{23}\, m_{33} \dots$

Una vez realizados el paso anterior, escribimos los números pares comprendidos entre 4 y la suma de último número primo analizado por el mismo, es decir $a = p_n + p_n = 2p_n$, esto es:

Numeros Pares={4,6,8,10,12,14,16,18,20…(p_n+1), (p_n+3)…}

Para verificar que todos estos números pares están dentro la matriz en la parte triangular superior, realizamos el siguiente procedimiento en dos pasos:

1) Se calcula el producto de todos estos números pares, es decir:

$$Pp = \prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k \qquad (4)$$

2) Para comprobar si todos los números pares están generados por la suma de dos números primos, aplicamos la siguiente condición que es clara para verificar esto, y consiste en dividir el producto de la matriz (Pm) entre el producto de todos los números pares () obtenidos anteriormente, esto es:

$$\frac{Pm}{Pp} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k} = C \qquad (5)$$

Donde C ∈ N,, Lo que garantiza que el residuo de la división es cero, o equivalentemente, si calculamos la función: *mod(PM,Pp)*=0.

Demostraremos lo anterior por el método de inducción matemática, el cual garantiza que todo número natural *n*,

si: $\frac{Pm}{Pp} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k}$ entonces se cumple que el *mod(PM,Pp)=0.*

Demostración:

Paso 1) Base de inducción. Hay que mostrar que la afirmación es cierta en el primer caso, para n = 1, el primer número primo, entonces $p^1 = 2$.

$$\frac{Pm(1)}{Pp(1)} = \frac{\prod_{j=1}^{1}\left(\prod_{i=1}^{1}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{2} 2k} = \frac{m_{11}}{2\,(2)} = \frac{p_1+p_1}{4} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

De aquí que *mod*(4,4) = 0. Así que la afirmación vale para n=1.

Paso 2) Hipostasis de inducción. Suponemos que la afirmación es cierta para un n

$$\frac{Pm(n)}{Pp(n)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k}$$

$$= \frac{\begin{gathered}(m_{11}\, m_{21}\, m_{31}\, m_{41} \dots m_{n1})(m_{12}\, m_{22}\, m_{32}\, m_{42} \dots m_{n2})(m_{13}\, m_{23}\, m_{33}\, m_{43} \dots m_{n3})\\ (m_{14}\, m_{24}\, m_{34}\, m_{44}\, m_{54} \dots m_{n4})(m_{15}\, m_{25}\, m_{35}\, m_{45}\, m_{55}\, m_{65} \dots m_{n5}) \dots (m_{1n}\, m_{2n}\, m_{3n}\, m_{4n} \dots m_{nn})\end{gathered}}{4 * 6 * 8 * 10 * \dots * 2\left(\frac{p_n+3}{2}\right)}$$

$$= \frac{\begin{gathered}\left((p_1+p_1) * 1 * 1 * 1 * \dots * 1\right)(1 * (p_2+p_2) * 1 * 1 * \dots * 1)(1 * (p_2+p_3) * (p_3+p_3) * 1 * \dots * 1)\\ (1 * (p_2+p_4) * (p_3+p_4) * (p_4+p_4) * 1 \dots * 1)(1 * (p_2+p_5) * (p_3+p_5) * (p_4+p_5) * (p_5+p_5) * 1 * \dots 1) \dots\\ \left(1 * (p_2+p_n) * (p_3+p_n) * (p_4+p_n) * (p_5+p_n) \dots * (p_n+p_n)\right)\end{gathered}}{4 * 6 * 8 * 10 * \dots * (p_n+3)}$$

$$= \frac{\begin{gathered}(4 * 1 * 1 * \dots * 1)(1 * 6 * 1 * \dots * 1)(1 * 8 * 10 * 1 \dots * 1)\\ (1 * 10 * 12 * 14 * 1 \dots * 1)(1 * 14 * 16 * 18 * 22 * 1 * \dots 1) \dots\\ \left(1 * (3+p_n) * (5+p_n) * (7+p_n) * (11+p_n) \dots * (p_n+p_n)\right)\end{gathered}}{4 * 6 * 8 * 10 * \dots * (p_n+3)}$$

De aquí que:

$$\frac{Pm(n)}{Pp(n)} = \frac{(4)(6)(8 * 10)(10 * 12 * 14)(14 * 16 * 18 * 22) * \dots * \left((3+p_n) * (5+p_n) * (7+p_n) * (11+p_n) \dots * 2p_n\right)}{4 * 6 * 8 * 10 * \dots * (p_n+3)}$$

$$\frac{Pm(n)}{Pp(n)} = 10 * 14 * \dots * (5+p_n) * (7+p_n) * (11+p_n) \dots * 2p_n$$

De donde se tiene que: *mod(PM(n),Pp(n))* = 0

Paso 3) Debemos mostrar que entonces es cierta para n+1.

$$\frac{Pm(n+1)}{Pp(n+1)} = \frac{\prod_{j=1}^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n+1}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_{n+1}+3}{2}} 2k}$$

$$= \frac{\left(m_{1(n+1)}\ m_{2(n+1)}\ m_{3(n+1)}\ m_{4(n+1)}\ \ m_{5(n+1)}\ \ m_{6(n+1)} \ldots m_{(n+1)(n+1)}\right)}{\left(2\,\frac{p_{n+1}+3}{2}\right)} \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k}$$

$$= \frac{\left(1 *\ (p_2+p_{n+1}) *\ (p_3+p_{n+1}) * (p_4+p_{n+1}) * (p_5+p_{n+1}) * \ldots * (p_{n+1}+p_{n+1})\right)}{(p_{n+1}+3)} \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k}$$

$$= \frac{\left(\ (3+p_{n+1}) *\ (5+p_{n+1}) * (7+p_{n+1}) * (11+p_{n+1}) * \ldots * (p_{n+1}+p_{n+1})\right)}{(p_{n+1}+3)} \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k}$$

Reduciendo términos semejantes.

$$\frac{Pm(n+1)}{Pp(n+1)} = \frac{\left(\ (3+p_{n+1}) *\ (5+p_{n+1}) * (7+p_{n+1}) * (11+p_{n+1}) * \ldots * 2p_{n+1}\right)}{(p_{n+1}+3)} \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k}$$

$$= \left(\ (5+p_{n+1}) * (7+p_{n+1}) * (11+p_{n+1}) * \ldots * 2p_{n+1}\right) \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k}$$

Como $\frac{Pm(n)}{Pp(n)} \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}} 2k}$ es cierta por la hipótesis de inducción, se demuestra que:

mod (*PM*(n + 1), *Pp* (n + 1)) = 0

Lo que demuestra que todos los números pares comprendidos entre 4 y N son generados por la suma de dos números primos mayores que 2.

Ejemplo de aplicación. Encontrar todos los números pares comprendidos entre 4 y 50, usando los números primos.

Solución: Primero encontramos los números primos comprendidos entre 2 y 50; estos son: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 y 47.

Esto implica que n = 15. Con base en esta información se construye la matriz M que contiene todas las combinaciones de los números pares que se obtienen al sumar dos números primos mayores que 2.

+	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
2	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	6	8	10	14	16	20	22	26	32	34	40	44	46	50
5	1	1	10	12	16	18	22	24	28	34	36	42	46	48	52
7	1	1	1	14	18	20	24	26	30	36	38	44	48	50	54
11	1	1	1	1	22	24	28	30	34	40	42	48	52	54	58
13	1	1	1	1	1	26	30	32	36	42	44	50	54	56	60
17	1	1	1	1	1	1	34	36	40	46	48	54	58	60	64
19	1	1	1	1	1	1	1	38	42	48	50	56	60	62	66
23	1	1	1	1	1	1	1	1	46	52	54	60	64	66	70
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	58	60	66	70	72	76
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	62	68	72	74	78
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	74	78	80	84
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	82	84	88
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	86	90
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	94

En la matriz M se puede observar que se generaron todos los números pares comprendidos entre 4 y 50, además de generar otros números pares comprendidos entre 54 y 90. Estadísticamente se genera una cantidad de números pares igual , Donde n es son los números primos utilizados y r es 2 por tomarse la suma de dos números primos seleccionados, esto es:

$$1 + C(15,2) = 1 + \frac{15!}{(15-2)!\ 2!} = 1 + 105 = 106$$

Para observar mejor los números pares generados comprendidos entre 4 a 50, expresamos la matriz M de la siguiente forma:

+	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
2	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	6	8	10	14	16	20	22	26	32	34	40	44	46	50
5	1	1	10	12	16	18	22	24	28	34	36	42	46	48	1
7	1	1	1	14	18	20	24	26	30	36	38	44	48	50	1
11	1	1	1	1	22	24	28	30	34	40	42	48	1	1	1
13	1	1	1	1	1	26	30	32	36	42	44	50	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	34	36	40	46	48	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	38	42	48	50	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	46	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

La matriz es la que se designa como la matriz M. Para apreciar y hacer seguimiento a los números pares de la matriz anterior, se trabajará de forma simbólica, esto es:

+	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
2	*a4*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
3	*1*	*a6*	*a8*	*a10*	*a14*	*a16*	*a20*	*a22*	*a26*	*a32*	*a34*	*a40*	*a44*	*a46*	*a50*
5	*1*	*1*	*a10*	*a12*	*a16*	*a18*	*a22*	*a24*	*a28*	*a34*	*a36*	*a42*	*a46*	*a48*	*1*
7	*1*	*1*	*1*	*a14*	*a18*	*a20*	*a24*	*a26*	*a30*	*a36*	*a38*	*a44*	*a48*	*a50*	*1*
11	*1*	*1*	*1*	*1*	*a22*	*a24*	*a28*	*a30*	*a34*	*a40*	*a42*	*a48*	*1*	*1*	*1*
13	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*a26*	*a30*	*a32*	*a36*	*a42*	*a44*	*a50*	*1*	*1*	*1*
17	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*a34*	*a36*	*a40*	*a46*	*a48*	*1*	*1*	*1*	*1*
19	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*a38*	*a42*	*a48*	*a50*	*1*	*1*	*1*	*1*
23	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*a46*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
29	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
31	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
37	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
41	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
43	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
47	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Se encuentran los productos de cada uno de los elementos de la matriz (M) simbólica y numéricamente anterior esto es:

$$Pm = \prod_{j=1}^{15}\left(\prod_{i=1}^{15}(m_{ij})\right)$$
$$= a4 * a6 * a8 * a10^2 * a12 * a14^2 * a16^2 * a18^2 * a22^3 * a20^2 * a24^3 * a26^3 * a28^2 * a30^3 * a34^4 * a32^2 * a36^4 * a38^2 * a40^3 * a42^4 * a46^4 * a48^5 * a44^3 * a50^4$$

El resultado numéricamente es:

Pm = 3.2941*10^{91}

A continuación, encontramos los números pares comprendidos entre 4 y 50, esto es:

Números pares = {4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46,48,50}. Para hacerle seguimiento a estos números, los expresaremos en forma simbólica, esto es:

$$Números\ pares = \{a4, a6, a8, a10, a12, a14, a16, a18, a20, a22, a24, a26, a28, a30, a32, a34, a36, a38, a40, a42, a44, a46, a48, a50\}$$

Para verificar que todos estos números pares están en la parte triangular superior de la matriz, realizamos el siguiente procedimiento:

- Calculamos el producto de todos estos números pares usando la representación simbólica, con el fin de observar el seguimiento de los números pares, es decir

$$Pp = \prod_{k=2}^{25} 2k = a4 * a6 * a8 * a10 * a12 * a14 * a16 * a18 * a20 * a22 * a24 * a26 * a28 * a30 * a32 * a34 * a36 * a38 * a40 * a42 * a44 * a46 * a48 * a50$$

- Multiplicamos todos los números pares comprendidos entre 4 a 50 el resultado numérico es:

Pp = 2.6023*10^{32}.

- Para comprobar que todos los números pares comprendidos entre 4 y 50 están dentro de los pares generados al sumar dos números primos realizamos la división del producto de la matriz (Pm) entre producto de todos los números pares obtenido anteriormente (Pp), esto es:

$$\frac{Pm}{Pp} = \frac{\prod_{j=1}^{15}\left(\prod_{i=1}^{15}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=2}^{25} 2k} =$$
$$= a10 * a14 * a16 * a18 * a22^2 * a20 * a24^2 * a26^2 * a28 * a30^2 * a34^3 * a32 * a36^3 * a38 * a40^2 * a42^3 * a46^3 * a48^4 * a44^2 * a50^3$$

En la forma simbólica se puede observar que se simplifican todos los factores del denominador el cual es el producto de todos los números pares comprendidos desde 4 a 50. Lo que garantiza que el residuo de la división es cero.

- Ahora si se realiza el cálculo numéricamente no daría:

$$\frac{Pm}{Pp} = \frac{3.2941 * 10^{91}}{2.6023\ 10^{32}} = 1.2658 * 10^{59}$$

El resultado que se obtiene es un número natural. Además, si calculamos la función modulo del producto de todos los números de la matriz triangular superior y del producto de los números pares menores que el número par máximo obtenido de sumar dos números primos, se obtiene residuo cero, esto es: *mod(Pm,Pp)* = 0.

Lo que demuestra que todos los números pares comprendidos entre 4 y 50 son generados por la suma de dos números primos mayores que 2.

3.3 ANÁLISIS DE LOS NÚMEROS PARES OBTENIDOS DE SUMAR DOS NÚMEROS PRIMOS.

En la siguiente tabla se muestran los resultados sobre la cantidad de números pares que se obtienen al sumar los números primos que existen desde 1 hasta un natural máximo determinado en cada uno de los quince (15) intervalos analizados.

Tabla 1. Cantidad de número pares generados por números primos.

Table 1. Number of even numbers generated by prime numbers.

Intervalo		Números de primos	Total de núm. pares generados	Cantidad de núm. pares menores o iguales que el límite superior	Cantidad de núm. pares mayores que el límite superior	Porcentaje de núm. pares menores o iguales que el límite superior	Porcentaje de núm. pares mayores que el límite superior
Límite inferior	Limite Superior						
1	50	15	106	63	43	59,4%	40,6%
1	100	25	301	188	113	62,5%	37,5%
1	200	46	1036	580	456	56,0%	44,0%
1	300	62	1892	1134	758	59,9%	40,1%
1	400	78	3004	1793	1211	59,7%	40,3%
1	500	95	4466	2596	1870	58,1%	41,9%
1	600	109	5887	3504	2383	59,5%	40,5%
1	700	125	7751	4541	3210	58,6%	41,4%
1	800	139	9592	5676	3916	59,2%	40,8%
1	900	154	11782	6923	4859	58,8%	41,2%
1	1000	168	14029	8222	5807	58,6%	41,4%
1	2000	303	45754	26551	19203	58,0%	42,0%
1	3000	430	92236	53107	39129	57,6%	42,4%

1	4000	550	150976	86852	64124	57,5%	42,5%
1	5000	669	223447	127623	95824	57,1%	42,9%

Con base en los resultados obtenidos en la tabla anterior, se puede observar que la cantidad de números pares generados aumenta considerablemente en cada uno de los intervalos. Es importante resaltar que la cantidad de números pares generados que son menores que límite superior en cada intervalo tienen un porcentaje promedio de 58.7% del total de los números pares generados. Porcentaje donde se evidencian cada uno de los números pares comprendidos en dicho intervalo.

Tabla 2. Cantidad de número pares generados por un número primos.

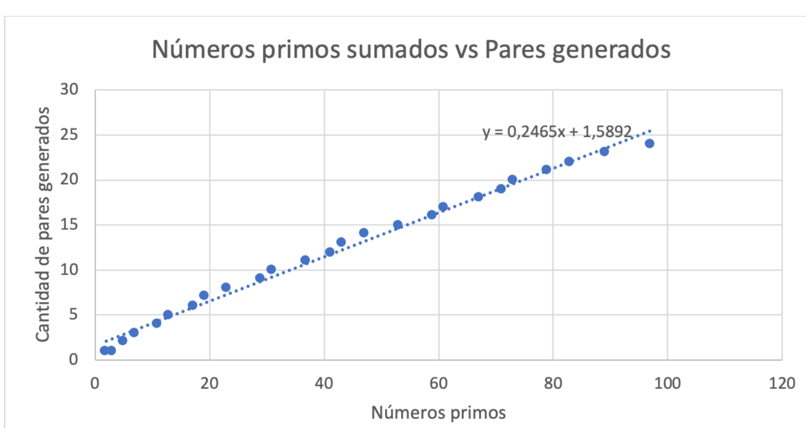
Table 2. Number of even numbers generated by a prime number.

Números primos sumados	Pares generados	Números primos sumados	Pares generados
2 con 2	1	59 con 3, 5, 7,.., 59	16
3 con 3	1	61 con 3, 5, 7,.., 61	17
5 con 3, 5	2	67 con 3, 5, 7,.., 67	18
7 con 3, 5, 7	3	71 con 3, 5, 7,.., 71	19
11 con 3, 5, 7, 11	4	73 con 3, 5, 7,.., 73	20
13 con 3, 5, 7, 11, 13	5	79 con 3, 5, 7,.., 79	21
17 con 3, 5, 7,.., 17	6	83 con 3, 5, 7,.., 83	22
19 con 3, 5, 7,.., 19	7	89 con 3, 5, 7,.., 89	23
23 con 3, 5, 7,.., 23	8	97 con 3, 5, 7,.., 97	24
29 con 3, 5, 7,.., 29	9	997 con 3, 5, 7,.., 997	167
31 con 3, 5, 7,.., 31	10	9.973 con 3, 5, 7,.., 9.973	1.228
37 con 3, 5, 7,.., 37	11	99.991 con 3, 5, 7,.., 99.991	9.591
41 con 3, 5, 7,.., 41	12	999.983 con 3, 5, 7,.., 999.983	78.497
43 con 3, 5, 7,.., 43	13	9.999.991 con 3, 5, 7,.., 9.999.991	664.578
47 con 3, 5, 7,.., 47	14	99.999.989 con 3, 5, 7,.., 99.999.989	5.761.454
53 con 3, 5, 7,.., 53	15	499.999.993 con 3, 5, 7,.., 499.999.993	26.355.866

Los resultados de la tabla anterior nos indican que la cantidad de números pares generados por los números primos muestra una tendencia línea en la cantidad de números pares que se generan al sumar dos números primos, ver la gráfica siguiente.

Grafica 1. Cantidad de pares generados al sumar dos números primos.

Graph 1. Number of pairs generated by adding two prime numbers.



Para implementar computacionalmente este problema se realizó el código en el ambiente de MATLAB, el cual se caracteriza por combinar un entorno de escritorio perfeccionado para el análisis iterativo y los procesos de diseño con un lenguaje de programación que expresa las matemáticas de matrices directamente [23]. A continuación, se presenta la programación en Matlab.

3.3 OBTENCIÓN DE LOS NÚMEROS IMPARES A PARTIR DE LOS NÚMEROS PRIMOS.

Para comprobar que se pueden obtener los números impares usando los números primos, se demostrará la conjetura débil de Goldbach que dice que: "todo número impar mayor que 5 puede escribirse como la suma de tres números primos".

Demostración: Primero se encuentran los números primos y se ordenan de menor a mayor, p_1<p_2<p_3<p_4<p_5<p_6<⋯<p_(n-1)< p_n<⋯, donde:

Posición (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…	n	…
Número primo (p^n)	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	…		…
Diferencia |p_n-p_(n-1) |		1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	…		…

Para obtener los números impares que provienen de la suma de tres números primos se procede de la siguiente manera:

Si usamos la conjetura fuerte de Goldbach: "todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos", y a estos números pares le sumamos tres (3) que es un número primo obtenemos todos los números impares, esto me genera la matriz M3:

Se encuentran todas las combinaciones resultantes de sumar tres números primos. Para ello se construye una matriz M3 cuadrada de () de la siguiente forma:

$$M3 = \begin{cases} p_i + p_j + 3 & si \quad (i \leq j) \wedge mod\big((p_i + p_j), 2\big) \neq 0 \\ 1 & para\ cualquier\ otro\ valor\ de\ \ p_i + p_j \end{cases} \quad (6)$$

+	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	…	p_n	…
p_1	$m_{11}+3$	1	1	1	1	1	1	1		1	…
p_2	1	$m_{22}+3$	$m_{23}+3$	$m_{24}+3$	$m_{25}+3$	$m_{26}+3$	$m_{27}+3$	$m_{28}+3$	…	$m_{2n}+3$	…
p_3	1	1	$m_{33}+3$	$m_{34}+3$	$m_{35}+3$	$m_{36}+3$	$m_{37}+3$	$m_{38}+3$	…	$m_{3n}+3$	…
p_4	1	1	1	$m_{44}+3$	$m_{45}+3$	$m_{46}+3$	$m_{47}+3$	$m_{48}+3$	…	$m_{4n}+3$	…
p_5	1	1	1	1	$m_{55}+3$	$m_{56}+3$	$m_{57}+3$	$m_{58}+3$	…	$m_{5n}+3$	…
p_6	1	1	1	1	1	$m_{66}+3$	$m_{67}+3$	$m_{68}+3$	…	$m_{6n}+3$	…
p_7	1	1	1	1	1	1	$m_{77}+3$	$m_{78}+3$	…	$m_{7n}+3$	…
p_8	1	1	1	1	1	1	1	$m_{88}+3$	…	$m_{8n}+3$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	… ⋮	⋮	….
p_n	1	1	1	1	1	1	1	1	…	$m_{in}+3$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	… ⋮	⋮	…

Donde $m_{11} = p_1 + p_1, \quad m_{12} = p_1 + p_2, \ m_{13} = p_1 + p_3, \ \ldots \ m_{nn} = p_n + p_n = 2p_n \ \ldots$ y así sucesivamente hasta llegar al elemento final de la matriz. El primer número par que se obtiene de la suma de dos números primos es el 4: 2+2=4. Si a este número le sumamos un salto que es un número primo impar, que en este caso será h= 3, tenemos: 2+2+3=7. Siete es el primer número impar mayor que 5. El segundo número par que se obtiene al sumar dos números primos es el 6, que se obtiene de: 3+3=6. Si a este número le sumamos el salto h=3, se tiene el segundo número impar que es 9. El tercer número par que se obtiene de sumar dos números primos es el 8, que viene de 3+5=8, si a este número le sumamos el salto h=3, se obtiene el tercer número impar, que a su vez se obtiene de sumar tres números primos, esto es: 3+5+3=11. Para demostrar que los números impares mayores que cinco (5) se generan de sumar tres números primos se hará de dos formas: la primera usando la función módulo parecida a la que se usó para verificar la generación de los números pares a partir de la suma de dos números primos. Y la segunda es usando el método de inducción matemática, esto es:

Forma 1. Demostración usando la función módulo.

La matriz (M3), contiene todos los números impares que se generan al sumar tres números primos, Estadísticamente según [22] se genera una cantidad de números pares igual a:

$$Números\ impares\ generados = 1 + C(n,r) = 1 + \frac{n!}{(n-r)!\ r!} \qquad (7)$$

Donde *n* es son los números primos utilizados y *r* es 2 por tomarse la suma de dos números primos seleccionados.

Basándose en los resultados de la matriz M3, que contiene todos los números impares generados al sumar tres números primos, se puede calcular el producto de cada uno de los elementos, esto es:

$$Pm3 = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(m_{ij}+3\right)\right) \quad (8)$$

$$Pm3 = \left((m_{11}+3)\ (m_{21}+3)\ (m_{31}+3)\ldots\right)\left((m_{12}+3)\ (m_{22}+3)\ (m_{32}+3)\ldots\right)\left((m_{13}+3)\ (m_{23}+3)\ (m_{33}+3)\ldots\right)\ldots$$

Esto implica que: $Pm3 = (m_{11}+3)\ (m_{21}+3)\ (m_{31}+3)\ldots(m_{12}+3)\ (m_{22}+3)\ (m_{32}+3)\ldots(m_{13}+3)\ (m_{23}+3)\ (m_{33}+3)\ldots$

Una vez realizados el paso anterior, escribimos los números impares comprendidos entre 7 y la suma de último primo analizado que es $a = (p_n+3)+3 = p_n+6$, esto es: $Numeros\ impares = \{7, 9, 11, 13, 15, 17, 19{,}21, 23 \ldots p_n + 6, \ldots\}$

Para verificar que todos estos números impares están dentro la matriz en la parte triangular superior, realizamos el siguiente procedimiento:

Se calcula el producto de todos estos números impares, es decir

$$Pi = \prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}}(2k+3) \qquad (9)$$

Lo anterior es el coherente con el Teorema fundamental de la Aritmética. Que dice que cada entero se puede representar como un producto de factores primos de forma única, salvo el orden de los factores. Para comprobar si todos los números impares están generados por la suma de tres números primos, aplicamos la siguiente condición que es clara para verificar esto, y consiste en dividir el producto de la matriz (Pm3) entre el producto de todos los números impares () obtenidos anteriormente, esto es:

$$\frac{Pm3}{Pi} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij}+3)\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}}(2k+3)} = B \qquad (10)$$

Donde , Lo que garantiza que el residuo de la división es cero, o equivalentemente, si calculamos la función:

Demostración:

Paso 1) Base de inducción. Hay que mostrar que la afirmación es cierta en el primer caso, para n = 1, el primer número primo, entonces $p_1 = 2$.

$$\frac{Pm3(1)}{Pi(1)} = \frac{\prod_{j=1}^{1}\left(\prod_{i=1}^{1}\left(m_{ij}+3\right)\right)}{\prod_{k=2}^{2}(2k+3)} = \frac{m_{11}+3}{2\ (2)+3} = \frac{p_1+p_1+3}{7} = \frac{2+2+3}{7} = 1$$

De aquí que que *mod* (7,7) = 0. Así que la afirmación vale para n=1.

Paso 2) Hipostasis de inducción. Suponemos que la afirmación es cierta para un n

$$\frac{Pm3(n)}{Pi(n)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij}+3)\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}}(2k+3)}$$

$$= \frac{\begin{gathered}\left((m_{11}+3)(m_{21}+3)(m_{31}+3)(m_{41}+3)\dots(m_{n1}+3)\right)\left((m_{12}+3)(m_{22}+3)(m_{32}+3)(m_{42}+3)\dots(m_{n2}+3)\right)\\ \left((m_{14}+3)(m_{24}+3)(m_{34}+3)(m_{44}+3)(m_{54}+3)\dots(m_{n4}+3)\right)\\ \left((m_{15}+3)(m_{25}+3)(m_{35}+3)(m_{45}+3)(m_{55}+3)(m_{65}+3)\dots(m_{n5}+3)\right)\\ \dots\left((m_{1n}+3)(m_{2n}+3)(m_{3n}+3)\dots(m_{nn}+3)\right)\end{gathered}}{7*9*11*13*\dots*\left(2\,\frac{p_n+3}{2}+3\right)}$$

$$= \frac{\begin{gathered}\left((p_1+p_1+3)*1*1*1*\dots*1\right)(1*(p_2+p_2+3)*1*1*\dots*1)(1*(p_2+p_3+3)*(p_3+p_3+3)*1*\dots*1)\\ (1*(p_2+p_4+3)*(p_3+p_4+3)*(p_4+p_4+3)*1\dots*1)\\ (1*(p_2+p_5+3)*(p_3+p_5+3)*(p_4+p_5+3)*(p_5+p_5+3)*1*\dots1)\dots\\ \left(1*(p_2+p_n+3)*(p_3+p_n+3)*(p_4+p_n+3)*(p_5+p_n+3)\dots*(p_n+p_n+3)\right)\end{gathered}}{7*9*11*13*\dots*(p_n+3+3)}$$

$$= \frac{\begin{gathered}(7*1*1*\dots*1)(1*9*1*\dots*1)(1*11*13*1\dots*1)\\ (1*13*15*17*1\dots*1)(1*17*19*21*25*1*\dots1)\dots\\ \left(1*(3+p_n+3)*(5+p_n+3)*(7+p_n+3)*(11+p_n+3)\dots*(p_n+p_n+3)\right)\end{gathered}}{7*9*11*13*\dots*(p_n+3+3)}$$

Como la suma del último primo es: $p_n + p_n + 3 = 2p_n + 3$.

$$\frac{Pm3(n)}{Pi(n)} = \frac{(7)*(9)*(11*13)*(13*15*17)*(17*19*21*25)\dots*\left((p_n+6)*(p_n+8)*(p_n+10)*(p_n+14)*\dots*(2p_n+3)\right)}{7*9*11*13*\dots*(p_n+6)}$$

$$\frac{Pm3(n)}{Pi(n)} = 13*17*\dots*(p_n+8)*(p_n+10)*(p_n+14)*\dots*(2p_n+3)$$

De donde se tiene que:

Paso 3) Debemos mostrar que entonces es cierta para .

$$\frac{Pm3(n+1)}{Pi(n+1)} = \frac{\prod_{j=1}^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n+1}(m_{ij}+3)\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_{n+1}+3}{2}}(2k+3)}$$

$$= \frac{\left(m_{1(n+1)}\,m_{2(n+1)}\,m_{3(n+1)}\dots m_{(n+1)(n+1)}\right)}{\left(2\,\frac{p_{n+1}+3}{2}+3\right)}\;\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij}+3)\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}}(2k+3)}$$

$$= \frac{\left(1*(p_2+p_{n+1}+3)*(p_3+p_{n+1}+3)*(p_4+p_{n+1}+3)*\dots*(p_{n+1}+p_{n+1}+3)\right)}{(p_{n+1}+3+3)}\;\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij}+3)\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}}(2k+3)}$$

$$= \frac{\left((3+p_{n+1}+3)*(5+p_{n+1}+3)*(7+p_{n+1}+3)*\dots*(p_{n+1}+p_{n+1}+3)\right)}{(p_{n+1}+6)}\;\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij}+3)\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_{n+3}}{2}}(2k+3)}$$

Reduciendo términos.

$$\frac{Pm3(n+1)}{Pi(n+1)} = \frac{\left((p_{n+1}+6)*(p_{n+1}+8)*(p_{n+1}+10)*(p_{n+1}+14)*\dots*(2p_{n+1}+3)\right)}{(p_{n+1}+6)}\;\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij}+3)\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}}(2k+3)}$$

$$= \left((p_{n+1}+8)*(p_{n+1}+10)*(p_{n+1}+14)*\dots*(2p_{n+1}+3)\right)\;\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij}+3)\right)}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}}(2k+3)}$$

Como $\frac{Pm3(n)}{Pi(n)}\frac{\prod_{j=1}^{n}(\prod_{i=1}^{n}(m_{ij}+3))}{\prod_{k=2}^{\frac{p_n+3}{2}}(2k+3)}$ **es cierta por la hipótesis de inducción, se demuestra que:** $mod(PM3(n+1), Pi(n+1)) = 0$.

Lo anterior demuestra la conjetura débil de Goldbach que dice que: “todo número impar mayor que 5 puede escribirse como la suma de tres números primos”.

Ejemplo de aplicación. Encontrar todos los números impares comprendidos entre 7 y 50, usando los números primos.

Solución: Primero encontramos los números primos comprendidos entre 2 y 50; estos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 y 47. De aquí que . Ahora se construirá la matriz que contiene todas las combinaciones de los números impares que se obtienen al sumar tres números primos mayores que 2 de la forma .

+	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
2	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	9	11	13	17	19	23	25	29	35	37	43	47	49	53
5	1	1	13	15	19	21	25	27	31	37	39	45	49	51	55
7	1	1	1	17	21	23	27	29	33	39	41	47	51	53	57
11	1	1	1	1	25	27	31	33	37	43	45	51	55	57	61
13	1	1	1	1	1	29	33	35	39	45	47	53	57	59	63
17	1	1	1	1	1	1	37	39	43	49	51	57	61	63	67
19	1	1	1	1	1	1	1	41	45	51	53	59	63	65	69
23	1	1	1	1	1	1	1	1	49	55	57	63	67	69	73
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	61	63	69	73	75	79
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	65	71	75	77	81
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	77	81	83	87
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	85	87	91
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	89	93
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	97

Para observar mejor los números impares generados comprendidos entre 4 a 50, realizamos los siguientes pasos: hacemos unos (1) a todos los elementos de la primera fila excepto el primer elemento que este caso es siete (7), como la matriz es simétrica, la parte triangular inferior de la matriz también se convierte en unos (1), por último, para toda suma de tres primos que sea mayor que el número impar máximo seleccionado, que este caso (53), se hace (1). Esto implica que:

+	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
2	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	9	11	13	17	19	23	25	29	35	37	43	47	49	53
5	1	1	13	15	19	21	25	27	31	37	39	45	49	51	1
7	1	1	1	17	21	23	27	29	33	39	41	47	51	53	1
11	1	1	1	1	25	27	31	33	37	43	45	51	1	1	1
13	1	1	1	1	1	29	33	35	39	45	47	53	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	37	39	43	49	51	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	41	45	51	53	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	49	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

La anterior matriz es la designada como la matriz (M3). Para apreciar y hacer seguimiento a los números impares, se trabajará de forma simbólica la matriz anterior, esto es:

+	*2*	*3*	*5*	*7*	*11*	*13*	*17*	*19*	*23*	*29*	*31*	*37*	*41*	*43*	*47*
2	*a7*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
3	*1*	*a9*	*a11*	*a13*	*a17*	*a19*	*a23*	*a25*	*a29*	*a35*	*a37*	*a43*	*a47*	*a49*	*a53*
5	*1*	*1*	*a13*	*a15*	*a19*	*a21*	*a25*	*a27*	*a31*	*a37*	*a39*	*a45*	*a49*	*a51*	*1*
7	*1*	*1*	*1*	*a17*	*a21*	*a23*	*a27*	*a29*	*a33*	*a39*	*a41*	*a47*	*a51*	*a53*	*1*
11	*1*	*1*	*1*	*1*	*a25*	*a27*	*a31*	*a33*	*a37*	*a43*	*a45*	*a51*	*1*	*1*	*1*
13	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*a29*	*a33*	*a35*	*a39*	*a45*	*a47*	*a53*	*1*	*1*	*1*
17	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*a37*	*a39*	*a43*	*a49*	*a51*	*1*	*1*	*1*	*1*
19	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*a41*	*a45*	*a51*	*a53*	*1*	*1*	*1*	*1*
23	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*a49*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
29	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
31	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
37	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
41	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
43	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
47	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Se encuentran los productos de cada uno de los elementos de la matriz M3, tanto simbólicamente como numéricamente, esto es:

$$Pm3 = \prod_{j=1}^{15}\left(\prod_{i=1}^{15}(m_{ij})\right)$$
$$= a7 * a9 * a11 * a13^2 * a15 * a17^2 * a19^2 * a21^2 * a25^3 * a23^2 * a27^3 * a29^3 * a31^2 * a33^3 * a37^4 * a35^2 * a39^4 * a41^2 * a43^3 * a45^4 * a49^4 * a51^5 * a47^3 * a53^4$$

El resultado numéricamente es: $Pm3 = 5.2534 * 10^{94}$

A continuación, encontramos los números impares comprendidos entre 7 y 50, esto es: Números impares = $\{7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ 37,\ 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53\}$

Para hacerle seguimiento a estos números, los expresaremos en forma simbólica, esto es:

$$Números\ impares = \{a7, a9, a11, a13, a15, a17, a19, a21, a23, a25, a27, a29, a31, a33, a35, a37, a39, a41, a43, a45, a47, a49, a51, a53\}$$

Para verificar que todos estos números pares están en la parte triangular superior de la matriz, realizamos el siguiente procedimiento: Calculamos el producto de todos estos números impares usando la representación simbólica, con el fin de observar el seguimiento de los números impares, es decir

$$Pi = \prod_{k=2}^{25}(2k+3) =$$
$$a7 * a9 * a11 * a13 * a15 * a17 * a19 * a21 * a23 * a25 * a27 * a29 * a31 * a33 * a35 * a37 * a39 * a41 * a43 * a45 * a47 * a49 * a51 * a53$$

Si multiplicamos todos los números impares comprendidos entre 7 a 50 el resultado numérico es: $Pi = 1.0530 * 10^{34}$

Para comprobar que todos los números impares comprendidos entre 7 y 50 están dentro de los impares generados al sumar tres números primos realizamos la división del producto de la matriz (*Pm3*) entre producto de todos los números impares obtenido anteriormente (*Pi*), esto es:

$$\frac{Pm3}{Pi} = \frac{\prod_{j=1}^{15}\left(\prod_{i=1}^{15}(m_{ij})\right)}{\prod_{k=3}^{24}(2k+1)} =$$
$$= a13 * a17 * a19 * a21 * a25^2 * a23 * a27^2 * a29^2 * a31 * a33^2 * a37^3 * a35 * a39^3 * a41 * a43^2 * a45^3 * a49^3 * a51^4 * a47^2 * a53^3$$

En la forma simbólica se puede observar que se simplifican todos los factores del denominador el cual es el producto de todos los números impares comprendidos desde 7 a 50. Lo que garantiza que el residuo de la división es cero. Ahora si se realiza el cálculo numéricamente no daría: $\frac{Pm3}{Pi} = \frac{5.2534*10^{94}}{1.0530*10^{34}} = 4.9889 * 10^{60}$.

El resultado que se obtiene es un número natural. Además, si calculamos la función modulo del producto de todos los números de la matriz triangular superior y del producto de los números impares menores que el número impar máximo, se obtiene residuo cero, esto es: $mod(Pm3, Pi) = 0$.

Lo que demuestra que: "todo número impar mayor que 5 puede escribirse como la suma de tres números primos".

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una demostración de la conjetura de Goldbach, tanto la fuerte como la débil. Esta contiene unos aportes valiosos para la solución de este problema tan interesante y para el estudio de los números primos, los cuales servirán para el desarrollo de investigaciones futuras sobre la teoría de números y sus aplicaciones. Para el análisis de la conjetura fuerte de Goldbach, se desarrolló una técnica basada en el análisis de una matriz que permite apreciar todas las combinaciones de los números pares que se obtienen de sumar dos números primos, así como la forma de verificar que se generan todos los números pares al sumar dos números primos.

Por su parte, la demostración de la conjetura débil de Goldbach se abordó de dos formas, en una de estas se hizo uso de la conjetura fuerte, la cual garantiza que la suma de dos primos mayores que 2 genera un número par, lo que facilitó encontrar un número primo impar que sirviera como salto, de tal forma que al sumárselo al número par se obtiene un número impar. En la otra, se propone una nueva técnica para obtener los números impares a partir de tres números primos, lo que implicó la construcción de una matriz que contiene los números primos en dos de sus lados y dentro del él se encuentran los números pares generados por la suma de dos números primos más tres; esta matriz permite calcular el número de combinaciones que puede tener un número par o impar cuando se obtiene de la suma de dos o tres números primos.

5. REFERENCIAS

[1] S. Barrios, Historia de las matemáticas, España: The Galobart Books, 2018.

[2] I. Stewart, Los grandes problemas matemáticos, España: Crítica, 2014.

[3] G. J y P. Sandoval, «Fractals and discrete dynamics associated to prime numbers,» Chaos, Solitons and Fractals, pp. 1-11, 2020.

[4] O. Me, «The genuine sieve of eratosthenes,» J Funct Program, pp. 95-106, 2009.

[5] H. Halberstam, «Sieve Methods,» Dover Publications, 2011.

[6] G. Andrews, «Number Theory,» Dover Publications, 1994.

[7] G. Iovane, «The distribution of prime numbers: the solution comes from dynamical processes and genetic algorithms,» Chaos, Solitons & Fractals, pp. 23-42, 2008.

[8] R. Liboff y M. Wong, «Quasi-chaotic property of the prime-number sequence,» J Theor Phys, pp. 3109-17, 1998.

[9] J. Romero, S. Nieves y R. Figueroa, «Análisis y Programación de los Números Primos,» Prospectiva, pp. 1-20, 2022.

[10] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Barcelona: Springer, 2010.

[11] P. Ribenboim, The Little Book of Big Primes, Canada: Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH , 1991.

[12] M. Piotr, «Binomial Coefficients, Roots of Unity and Powers of Prime,» Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, p. :1489–1506, 2022.

[13] M. Chamberland y K. Dilcher, «A binomial sum related to Wolstenholme's theorem,» J. Number Theory 129, p. 2659–2672, 2009.

[14] C. Helou y G. Terjanian, «OnWolstenholme's theorem and its converse,» J. Number Theory 128, p. 475–499, 2008.

[15] R. McIntosh y E. Roettger, « A search for Fibonacci-Wieferich and Wolstenholme primes,» Math. Comp. 76, p. 2087–2094, 2007.

[16] Ø. Rødseth, «A note on primality tests for N = h · 2^n − 1,» BIT Numer. Math. 34(3), p. 451–454, 1994.

[17] D. Bailey, «Two p^3 variations of Lucas' theorem,» J. Number Theory 35, p. 208–215, 1990.

[18] K. Davis y W. Webb, «Lucas' theorem for prime powers,» Eur. J. Combin 11, p. 229–233, 1990.

[19] A. Granville, « Arithmetic properties of binomial coefficients. I. Binomial coefficients modulo prime,» Organic mathematics (Burnady, BC, 1995), pp. 253-276, 1997.

[20] R. Meštrovi´c, «A note on the congruence (np^k mp^k)= (m n) (mod p^r),» Czechoslovak Math. J 62(1), p. 59–65, 2012.

[21] J. Zhao, «Bernoulli numbers, Wolstenholme's theorem, and p^5 variations of Lucas' theorem,» J. Number Theory 123, pp. 18-26, 2007.

[22] R. Walpole, R. Myers, S. Myers y K. Ye, Probobilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias, México: Pearson, 2012.

[23] Mathworks, «Matlab para computadores,» 9 01 2022. [En línea]. Available: https://la.mathworks.com/.

Esta revista fue editada en el Área de Publicidad,
Departamento de Comunicaciones de la Universidad Autónoma del Caribe.