Análisis y Programación de los Números Primos

Analysis And Programming of The Prime Numbers

Julio Cesar Romero Pabón[1], Roberto Enrique Figueroa Molina[2], Sergio Samuel Nieves Vanegas [3]

[1]Lic. Matemáticas y Física, Magister en Matemáticas Aplicadas, Doctor en Ciencias de la Educación Mención Matemáticas, Universidad del Atlántico. Barranquilla. Colombia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1620-9223. Email: julioromero@mail.uniatlantico.edu.co
[2] Químico Farmacéutico, Magister en Docencia de la Química, Doctor en Educación, Universidad del Atlántico. Barranquilla. Colombia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0697-5509. Email: robertofigueroa@mail.uniatlantico.edu.co
[3] Lic. Matemáticas y Física, Magister en Estadística Aplicada, Doctor (c) En Ciencias Mención Gerencia, Universidad Autónoma del Caribe. Barranquilla. Colombia.
ORCID: https://orcid.org/ 0000-0001-5000-0445. Email: Sergio.nieves@uace.edu.co

Recibido: 23/10/2020
Aceptado: 02/02/2021

***Cite this article as*: J. Romero, R. Figueroa y S. Nieves "Análisis y Programación de los Números Primos", Prospectiva, Vol 19, N° 2, 2021.**

https://doi.org/10.15665/rp.v19i2.2564

RESUMEN

El estudio de los números primos es un tema esencial para las matemáticas, el Teorema Fundamental de la Aritmética, afirma que, cualquier número puede descomponerse en un producto único de números primos. El concepto de descomponer un número en factores únicos lo introdujo Euclides, quien realizó aportes a las matemáticas y a la geometría. El trabajo presenta un algoritmo, para obtener los números primos de un conjunto grandemente estimado, como también, el análisis relacionado con la cantidad de números primos que concurren en determinado intervalo de números, su organización, clasificación y diferencias que coexisten entre ellos. En la actualidad los números primos son altamente estudiados, se emplean para codificar cualquier tipo de información de forma segura, puesto que, estos números son únicos y no se ajustan a ninguna regla o patrón para construirlos.

Palabras claves: números primos, factores primos, teorema de un número primo, primos de Mersenne.

ABSTRACT

The study of prime numbers is a subject of great importance for mathematics, because they are essential for the fundamental pillars of Arithmetic, as is the case with its Fundamental Theorem, which states that any number can be decomposed into a single product. of prime numbers. This concept of decomposing a number into unique factors was introduced by Euclid, who made great contributions to mathematics and geometry. This work presents an algorithm to obtain the prime numbers in a highly considered set, as well as its analysis related to the number of prime numbers that exist in a given number interval, their organization, classification and differences that exist between them. Prime numbers are currently being studied as they are used to encode any type of information in a secure way, since these numbers are unique and do not adhere to any rule or pattern to build them.

Key words: prime numbers, prime factors, prime number theorem, Mersenne primes.

1. INTRODUCCIÓN

El escrito presenta un estudio sobre los números primos, dentro de un conjunto de números estimados para su análisis y procesamiento. Las indagaciones sobre el tema han captado la atención de matemáticos altamente influyentes en el desarrollo de los números, como es el caso de Euclides y Gauss, el primero dio los fundamentos para la aritmética, basada en la descomposición de un número en sus factores únicos, temas de importancia para la obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo [1]. Mientras que Gauss analizó su obtención y distribución, considerándolas como un tema de complejidad, ya que, no pudo encontrar un patrón que le permitiera calcular y predecir los números primos. Todas estas investigaciones sobre los números primos se realizan, pues, son piezas significantes para la producción de algoritmos y cálculos complejos.

La importancia de la criptografía en la seguridad de los sistemas, se ha concentrado en el estudio, obtención y comportamiento de los números primos. Ya que, usan estos números para los sistemas de seguridad en los productos bancarios como son los números secretos, transferencias bancarias y otras operaciones que implican el flujo de activos o valores. También son usados, para la seguridad en las comunicaciones realizada telemáticamente por medio de la Internet. Es importante resaltar que estamos en la era de la información y el conocimiento, quienes poseen estos factores tiene el control de todo el sistema. Es por ello, se busca conocer los números primos, pues, están presentes de modo natural, se esparcen espontáneamente y forman parte del conocimiento técnico y científico de las matemáticas.

La repuesta a estas cuestiones y a otras relacionadas, se encuentra dentro de la criptografía en clave pública. En dicha criptografía, con la clave pública se cifran los mensajes y con la privada se descifran. De este modo cualquiera puede cifrar mensajes y transmitirlos al receptor conocedor de la clave privada que es el único que será capaz de entenderlos.

La criptografía de clave pública presenta una ventaja sobre la criptografía de clave secreta. Si (n) personas desean comunicarse mediante un criptosistema de clave secreta, cada una de ellas debe disponer de una clave diferente para cada persona del grupo. Por tanto, hace falta poder generar en total n(n-1) claves. Teniendo en cuenta que (n) puede ser del orden de varios millares, será necesario generar ficheros de varios millones de claves. Además, añadir un miembro al grupo no es sencillo, ya que, habrá que generar otras (n) claves para que el nuevo miembro pueda comunicarse con los demás integrantes del grupo, y después distribuir las nuevas claves a todo el grupo. Para el caso de un criptosistema asimétrico, se guardan las (n) claves públicas de los miembros del grupo en un directorio. Para añadir un miembro, basta con que ponga su clave pública en el directorio. La seguridad en criptografía asimétrica es un problema mucho más delicado que en la simétrica, ya que, el único dato no público es la clave que sirve para el descifrado. Además, no es fácil reunir seguridad y efectividad en un cifrado en clave pública y solamente unos pocos de los numerosos criptosistemas que han sido propuestos lo han logrado.

Otra característica distintiva de los algoritmos asimétricos es que, a diferencia de los ataques sobre criptosistemas simétricos, cualquier criptoanálisis tiene la oportunidad de usar el conocimiento obtenido de la clave pública. Los algoritmos asimétricos se diseñan en torno a la conjeturada dificultad de resolver ciertos problemas matemáticos. Si se encuentra un algoritmo mejorado que puede resolver el problema, el criptosistema se ve debilitado. Por lo general estos algoritmos están basado en las llamadas funciones unidireccionales definiendo a las mismas como funciones que transforman una variable x en otra y si dada x, el cálculo de y se puede realizar en tiempo polinomial y además, dada y, el cómputo de una x que produce tal y es un problema intratable [2].

2. TEORÍA

El término primo se deriva del latín "primus" que significa primero (protos en griego). En matemáticas un número primo, es aquel número natural que sólo puede dividirse por 1 y por sí mismo. El teorema fundamental de la aritmética, afirma que todo número entero se expresa de forma única como producto de números primos. Por eso, se les considera los "primeros", porque a partir de ellos obtenemos todos los demás números enteros. Este resultado y otros no menos importantes han llevado a considerar a los números primos como "los primeros", porque a partir de estos se obtienen todos los demás números naturales. Adicionalmente [3], afirma que la primalidad es la propiedad que tiene un número de ser, precisamente, primo; agrega que, debido a que el único número primo par es 2, es frecuente escuchar que se utilice el término primo impar para referirse a cualquier primo mayor que 2.

Por la importancia de los números primos, desde su descubrimiento, los matemáticos, ingenieros y aficionados a las matemáticas, han realizado enormes esfuerzos por conseguir fórmulas que permitan determinar con rapidez cuando un entero dado es primo. Sin embargo, a la fecha no existe una formula o algoritmo que así lo permita; sin embargo, el trabajo no ha sido en vano, ya que, esto ha permitido descubrir importantes propiedades de estos números, por ejemplo, la consecución de estos desde 2 hasta un número determinado y, como lo ocurrido en diciembre de 2018 [4], año en el que el ingeniero estadounidense Johanathan Pace, mediante programación encontró que $2^{82589933} - 1$ es primo, el cual pertenece a una importante familia de números conocida como los primos de Mersenne y por ello, este es conocido hoy en la literatura matemática como M82589933, y con la especial característica que este tiene 24.862.048 dígitos, es decir, tiene más de medio millón de dígitos que el anterior primo $2^{77232917} - 1$, considerado el hasta entonces primo más grande conseguido .

NOTA: Los números de la forma $2^p - 1$ con p primo, se llaman números de Mersenne y, fueron bautizados así en honor a su mentor el monje francés Marín Mersenne (1588-1648) quien los estudió detalladamente en 1644 en su libro Cogitata Physica–Mathematica. A los números de Mersenne que son primos se les llama primos de Mersenne y se denotan por Mp.

2.1 ALGORITMO PARA ENCONTRAR UN NÚMERO PRIMO

El algoritmo que puede utilizarse para saber si un número (n) es primo es el de la división. Se trata de ir probando para ver si tiene algún divisor propio. Para ello, vamos dividiendo el número (n) entre 2, 3, 4, 5, ..., n-1. Si alguna de las divisiones es exacta y el residuo es cero, se puede afirmar que el número (n) es compuesto. Si ninguna de estas divisiones es exacta, el número (n) es primo. Este método puede hacerse más eficiente observando simplemente, que si un número es compuesto alguno de sus factores (sin contar el 1) debe ser menor o igual que $\sqrt{n}$. Por lo tanto, el número de divisiones a realizar es menor. Sólo hay que dividir entre 2, 3, 4, 5, ... , $\sqrt{n}$. En realidad, bastaría hacer las divisiones entre los números primos menores o iguales que $\sqrt{n}$.

Ejemplo: Para probar que 311 es primo sabiendo que $\sqrt{311} = 17.635192$ ... basta con ver que no es divisible entre 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17.

Este procedimiento resulta eficiente para números o factores pequeños. Sin embargo, si el número tiene por ejemplo unas 24 cifras y es primo, habrá que realizar miles de millones de divisiones para comprobarlo. Aunque un ordenador pueda realizar millones de divisiones en un segundo, el tiempo necesario es bastante considerable. Y cuando el número de dígitos aumenta el tiempo necesario ¡crece de forma exponencial!

2.2 LA SUCESIÓN DE LOS NÚMEROS PRIMOS

La sucesión de los números primos es impredecible actualmente. Euler de 1737 [5] realizó un comentario sobre los números primo en una ocasión, afirmando que "los matemáticos han intentado en vano hasta la fecha descubrir algún orden en la sucesión de los números primos, y tenemos razones para creer que es un misterio en el que la mente no podrá penetrar nunca". En una conferencia dada por [6], éste señaló que:

"Hay dos hechos en torno a la distribución de los números primos que espero crean tan abrumadoramente, que quedarán por siempre grabadas en sus corazones. La primera es que a pesar de su sencilla definición y de su papel como ladrillos que construyen los números naturales, los números primos crecen como la mala hierba alrededor de los números naturales, simulando no obedecer otra ley que la del azar, y nadie puede predecir donde brotará el siguiente. El segundo hecho es incluso más asombroso, porque dice justamente lo opuesto: que los números primos hacen gala de una pasmosa regularidad, que hay leyes que gobiernan su comportamiento, y que obedecen esas leyes con una precisión casi militar" [7].

Con el paso del tiempo se han hechos avances sobre el estudio de los números primos y resultados significativos en este campo de estudio, si miramos hacia atrás parecen titánicos. En primer lugar, porque contamos con ordenadores donde se pueden desarrollar algoritmos para analizar los números primos, los cuales pueden almacenarse en tablas o bases de datos para luego estudiarlos bien. Además, se puede corroborar la teoría o aportes realizados por otros matemáticos sobre los números primos.

2.3 EL TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln(n)} \cong Li(x)$$

La función que nos dice cuántos números primos hay en el intervalo [0, n] se representa por:

$$\pi(n) = \#\{p \leq n, \text{ p primo}\}$$

Legendre y Gauss (1798-1792) dedicaron mucho tiempo y esfuerzo a calcular números primos y contar los que había en grandes intervalos. Conjeturaron que el valor de π(n) podía aproximarse por $\frac{n}{\ln(n)}$.

Según Chebychev en 1854, [8], en su intento de demostrar esta conjetura, obtiene que existen dos constantes c1 y c2 verificando $0 < c1 \leq 1 \leq c2 < \infty$ tales que

$$c1 \cdot \frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n) \leq c2 \cdot \frac{n}{\ln(n)}$$

Sylvester en 1881, [9] obtiene otro resultado similar, pero más fino; a saber, que

$$0{,}96695 \leq c1 \leq 1 \leq c2 \leq 1{,}04423$$

El teorema del número primo provee una aproximación asintótica al valor de π(n) y se expresa de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)^n}{\frac{n}{\ln(n)}} = 1$$

Esta ecuación fue demostrada en primer lugar por Hadamard y Vallée Poussin (1896) basándose en algunas propiedades de la función Zeta de Riemann (1896).

Una mejor aproximación de π(x) es la función $Li(x)$.

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{(\ln(x))^2} + \frac{2x}{(\ln(x))^3} + \cdots$$

Lo cual equivale a decir que

$$\frac{n}{\ln(n)} + \frac{n}{(\ln(n))^2} + \frac{2n}{(\ln(n))^3} + \cdots$$

Se aproxima mejor a $\pi(n)$ que $\frac{n}{\ln(n)}$.

Koch (1901) demuestra que la Hipótesis de Riemann (1896) es equivalente a la desigualdad

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \leq c\sqrt{x}\cdot\ln(x)$$

Según [10] y [11] formulan demostraciones más sencillas en el sentido que no se apoyan en "herramientas de gran calibre" como la función zeta o similares.

Para valores de (n) no enorme se comprobó que π(n) < Li(n), lo cual dio lugar a la conjetura que la desigualdad es verificable para todo valor de (n). Sin embargo, la conjetura fue refutada por Littlewood (1914) al demostrar que ambas funciones se cruzan infinitas veces. Posteriormente Skewes en 1933 [12] demostró que el primer encuentro de ambas funciones ocurre para un (n) menor que $10^{10^{10^{34}}}$. Este número se redujo después hasta 10^{371}.

2.4 PRIMOS DE MERSENNE

A los números primos de la forma $2^n - 1$ se les llama primos de Mersenne. Es fácil demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces (n) debe ser primo.

Si suponemos que (n) es compuesto, pongamos n = a·b (a, b>1), entonces

$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(\, 2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 2^a + 1\,)$$

Y por lo tanto $2^n - 1$ también es compuesto. Pero el hecho de que (n) sea primo no asegura que $2^n - 1$ sea primo. Una propiedad destacable es que si p es primo y 2p-1 es compuesto entonces sus factores son de la forma 2kp+1. Por ejemplo, pero 2^11-1 = 2047 = 23·89 y 23 = 2·11+1, 89 = 8·11+1.

Todavía no se sabe si el número de primos de Mersenne es finito o infinito.

2.5 LA CONJETURA DE LOS PRIMOS GEMELOS

Dos primos se llaman gemelos si se diferencian en dos unidades. Por ejemplo 5 y 7 o también 29 y 31. Saber si hay una cantidad finita o infinita de tales parejas es un problema abierto desde mayo de 2007, aunque se cree ampliamente que hay infinitos.

Viggo Brun (1919) demostró que la suma de los inversos de los primos gemelos converge a un número que llamaremos la constante de Brun para primos gemelos. Se representa como B2 y su valor se estima en torno a 1.902160583104.

Alfonso de Polignac (1817-1890) fue un matemático francés que conjeturó que para cada número natural $k>0$, existen infinitas parejas de primos que están a una distancia de 2k. El caso $k=1$ es la conjetura de los primos gemelos.

De forma similar al teorema del número del número primo, la conjetura de Hardy-Littlewood (1923) postula que el número de primos $p \leq N$, tales que $p+2$ es también primo se aproxima asintóticamente a $2 \cdot C_2 \cdot N/(\mathrm{Ln}(N))^2$, donde $C_2 = 0{,}6601618158...$

Erdös (1949) demuestra que existe una constante $c<1$ e infinitos primos p tales que $p'-p < c \cdot \mathrm{Ln}(p)$, donde p' denota al menor número primo mayor que p (el primo que "sigue" a p). Con el paso de los años, el resultado se fue mejorando. En 1986, se demuestra que debe ser menor que 0,25; en 2004, menor que 0,0858; en 2005, arbitrariamente pequeña.

Chen Jingrun (1966) demuestra que existen infinitos primos p tales que $p + 2$ es o primo o semiprimo (producto de dos primos).

En febrero de 2012, la conjetura sigue abierta.

2.6 PROGRAMACIÓN EN AMBIENTE MATLAB DEL GRADIENTE GEOTÉRMICO

Para implementar el algoritmo que permita calcular y analizar los números primos se usará el lenguaje de programación de MATLAB [13], el cual se caracteriza por ser compatible con los lenguajes C y C++, además, de combinar un entorno de escritorio perfeccionado para el análisis iterativo y los procesos de diseño con un lenguaje de programación que expresa las matemáticas en forma matricial [8]. Finalmente, es maravilloso observar que, usando este mismo lenguaje provisto por Matlab, Vergara y Romero en 2020 consiguieron la simulación y programación del sistema que rige el péndulo compuesto, resultado publicado en [14]. A continuación, se presenta la programación en Matlab.

```
clc
clear all
disp('******* CALCULO DE LOS NÚMEROS PRIMOS *******')
disp(' ')
disp('Número máximo')
n1=1
n =1000000
digitos=12
c=1;
tic
for i=[n1:n]
    iter(i)=i;
    if i==1 | i==2
        p(c)=2;
```

```
        pos(1)=2;
    else
        m=round(i^(1/2));
        for j=[2:m]
            mod_num=mod(i,j);
            if mod_num==0
                break
            else
                if j==m
                    c=c+1;
                    p(c)=i;
                    pos(c)=i;
                end
            end
        end
    end
end
poss=pos;
poss(1)=[];
poss(end+1)=poss(end);
dife=poss-pos;
dife(end)=[];
difet=[0 dife];
disp('     *** Números primos ***')
disp('_________________________________')
disp('  posi. dif_pa_ps  n_primo')
disp('_________________________________')
mp=[ [1:c]' difet' p'];
disp(mp)
disp('_________________________________')
disp(' ')
tiempo=toc
x=[1:c];
y=p;
minimo=min(difet)
maximo_dif=max(difet)
disp(' ')
disp(' *** Teorema del Numero primos: Legendre Gauss. np= n/log(n),
numero de primo en [0, n] ***')
%numero_primo=n/log10(n)
numero_primo_ln=n/log(n)
disp('Aproximación con sucesiones ')
numero_primo_suse_2=n/log(n)+n/(log(n))^2
numero_primo_suse_3=n/log(n)+n/(log(n))^2+(2*n)/(log(n))^3
disp('Primos Gemelos')
disp('Diferencia en los primos o g=Pi-Pi-1')
g=2;
cg=0;
for i=[1:c]
    if difet(i)==g;
```

```
       cg=cg+1;
       pri_gema(cg)=p(i-1);
       pri_gemd(cg)=p(i);
       difegem(cg)=difet(i);
       v_cg(cg)=cg;
    end
end
disp('     *** Números Primos Gemelos ***')
disp('________________________________________________________')
disp(' posi. pri_gem diferencia')
disp('________________________________________________________')
npgem=[ v_cg' pri_gema' pri_gemd'  difegem'];
disp(vpa(npgem,digitos))
disp('________________________________________________________')
disp(' ')
cgs=1;
for i=[1:cg]
    iter=i;
    if i==1
      v_pri_gems(cgs)=npgem(i,2);
    end
    if (i>1)&(npgem(i,2)==npgem(i-1,3));
        cgs=cgs+1;
        v_pri_gems(cgs)=npgem(i,2);
    end

    if (i>1)&(npgem(i,2)>npgem(i-1,3));
       cgs=cgs+1;
        v_pri_gems(cgs)=npgem(i-1,3);
       cgs=cgs+1;
        v_pri_gems(cgs)=npgem(i,2);
    end

    if i==cg
        v_pri_gems=[v_pri_gems npgem(i,3)];
    end
end
disp('     *** Números Primos Gemelos ***')
disp('________________________________________________________')
disp(' posi.   pri_gem   ')
disp('________________________________________________________')
npgems=[ [1:cgs+1]' v_pri_gems'];
disp(vpa(npgems,digitos))
disp('________________________________________________________')
disp(' ')
disp('En 1919 Viggo Brun demostró que la suma de los inversos de los
primos gemelos converge a un número')
disp('que llamaremos la constante de Brun para primos gemelos. Se
representa como B2 y su valor se estima en torno a 1.902160583104. ')
for i=[1:cgs+1]
```

```
   v_inv_pri_gem(i)=1/v_pri_gems(i);
end
suma_inv_prim_gem=sum(v inv_pri_gem)
```

3. RESULTADOS

Una vez programada en el ambiente de Matlab el algoritmo para obtener los números primos, se puso a correr el código, arrojando la siguiente información:

3.1 EJECUSIÓN DEL CODIGO PROGRAMADO EN MATLAB LOS NÚMEROS PRIMOS

tabla 1. Números primos del 2 a 110.000.000.
table 1. Prime numbers from 2 to 110,000,000.

2	1000003	2000003	3000017	4000037	5000011	6000011	7000003	8000009	···	90000049	100000007
3	1000033	2000029	3000029	4000039	5000077	6000023	7000009	8000017	···	90000059	100000037
5	1000037	2000039	3000047	4000043	5000081	6000041	7000033	8000023	···	90000073	100000039
7	1000039	2000081	3000061	4000063	5000087	6000047	7000057	8000033	···	90000083	100000049
11	1000081	2000083	3000073	4000067	5000101	6000053	7000061	8000051	···	90000089	100000073
13	1000099	2000093	3000077	4000079	5000111	6000061	7000069	8000053	···	90000103	100000081
17	1000117	2000107	3000089	4000081	5000113	6000073	7000087	8000063	···	90000107	100000123
19	1000121	2000113	3000103	4000093	5000153	6000101	7000109	8000071	···	90000109	100000127
23	1000133	2000143	3000131	4000133	5000161	6000103	7000121	8000087	···	90000121	100000193
29	1000151	2000147	3000133	4000153	5000167	6000109	7000127	8000099	···	90000133	100000213
31	1000159	2000153	3000161	4000159	5000197	6000119	7000129	8000101	···	90000149	100000217
37	1000171	2000177	3000181	4000169	5000201	6000121	7000157	8000117	···	90000217	100000223
41	1000183	2000209	3000199	4000189	5000213	6000149	7000163	8000119	···	90000221	100000231
43	1000187	2000221	3000223	4000237	5000251	6000157	7000171	8000141	···	90000233	100000237
47	1000193	2000227	3000229	4000261	5000257	6000173	7000181	8000171	···	90000241	100000259
53	1000199	2000249	3000251	4000267	5000263	6000191	7000219	8000173	···	90000257	100000267
59	1000211	2000261	3000289	4000273	5000299	6000199	7000241	8000189	···	90000269	100000279
61	1000213	2000269	3000299	4000277	5000311	6000221	7000249	8000219	···	90000293	100000357
67	1000231	2000281	3000301	4000291	5000321	6000229	7000267	8000221	···	90000299	100000379
71	1000249	2000291	3000317	4000301	5000339	6000233	7000297	8000231	···	90000301	100000393
73	1000253	2000293	3000331	4000303	5000381	6000271	7000309	8000261	···	90000331	100000399
79	1000273	2000303	3000343	4000309	5000389	6000277	7000313	8000309	···	90000343	100000421
83	1000289	2000309	3000359	4000343	5000399	6000283	7000333	8000323	···	90000373	100000429
89	1000291	2000321	3000377	4000357	5000423	6000301	7000337	8000339	···	90000377	100000463
97	1000303	2000329	3000379	4000361	5000473	6000307	7000351	8000357	···	90000401	100000469
101	1000313	2000351	3000409	4000379	5000491	6000317	7000373	8000359	···	90000433	100000471
103	1000333	2000353	3000463	4000439	5000503	6000343	7000391	8000401	···	90000439	100000493
107	1000357	2000371	3000469	4000489	5000519	6000373	7000429	8000407	···	90000451	100000541
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

3.2 ANÁLISIS DE LAS DIFERENCIAS DE LOS NÚMEROS PRIMOS.

3.2.1 ANÁLISIS DE LOS NÚMEROS PRIMOS CON DIFERENCIA $\boldsymbol{D = |p_i - p_{i-1}|}$

3.2.1.1 Los Números Gemelos

Los números gemelos, son aquellos números primos con diferencia dos, es decir: $D = |p_i - p_{i-1}| = 2$.

3.2.1.2 Análisis de los números primos con diferencia cuatro $\boldsymbol{D = |p_i - p_{i-1}| = 4}$

El comportamiento de los números primos con diferencia cuatro, es decir: $D = |p_i - p_{i-1}| = 4$.

3.2.1.3 Análisis de los números primos con diferencia seis $\boldsymbol{D = |p_i - p_{i-1}| = 6}$

Por otro lado, se tiene el comportamiento de los números primos con diferencia seis, es decir: $D = |p_i - p_{i-1}| = 6$.

3.2.1.4 Análisis de los números primos con diferencia seis $\boldsymbol{D = |p_i - p_{i-1}| = 12}$

Por último, se analiza el comportamiento de los números primos con diferencia doce, es decir: $D = |p_i - p_{i-1}| = 12$.

3.2.2 CÁLCULO DE LA CANTIDAD DE NÚMEROS PRIMOS CON EL TEOREMA

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln(n)}$$

La función indica cuántos números primos hay en el intervalo [0, n] se representa por $\pi(n)$.

Una mejor aproximación de π(x) es la función $Li(x)$.

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{(\ln(x))^2} + \frac{2x}{(\ln(x))^3} + \cdots$$

Lo cual equivale a decir que

$$\frac{n}{\ln(n)} + \frac{n}{(\ln(n))^2} + \frac{2n}{(\ln(n))^3} + \cdots$$

Se aproxima mejor a $\pi(n)$ que $\frac{n}{\ln(n)}$.

3.3 ANÁLISIS DE LOS NÚMEROS PRIMOS MENORES O PRIMOS COMPRENDIDOS DEL 2 AL 110.000.000

Analicemos ahora los números primos comprendidos desde 2 a 110.000.000. La cantidad de números primos es de 6303309, los cuales se encuentran distribuidos de la siguiente forma:

Tabla 2. Análisis de los números primos comprendidos entre 2 y 110M con el teorema de: $\pi(n) = \frac{n}{ln(n)}$.

Table 2. Analysis of the prime numbers between 2 and 110M with the theorem of: : $\pi(n) = \frac{n}{ln(n)}$.

Intervalo de números naturales		Cantidad de números primos	Cantidad de números primos acumulativa	Cantidad con el Teorema $\pi(n) = \frac{n}{ln(n)}$	Diferencia entre las cantidad números primos acumulativa y π(n)	Porcentaje de números primos	Porcentaje de números primos acumulativa
2	**10.000.000**	664579	664579	620421	44158	10,54%	10,54%
10.000.001	**20.000.000**	606028	1270607	1189680	80927	9,61%	20,16%
20.000.001	**30.000.000**	587252	1857859	1742493	115366	9,32%	29,47%
30.000.001	**40.000.000**	575795	2433654	2285141	148513	9,13%	38,61%
40.000.001	**50.000.000**	567480	3001134	2820471	180663	9,00%	47,61%
50.000.001	**60.000.000**	560981	3562115	3350111	212004	8,90%	56,51%
60.000.001	**70.000.000**	555949	4118064	3875109	242955	8,82%	65,33%
70.000.001	**80.000.000**	551318	4669382	4396199	273183	8,75%	74,08%
80.000.001	**90.000.000**	547572	5216954	4913919	303035	8,69%	82,77%
90.000.001	**100.000.000**	544501	5761455	5428681	332774	8,64%	91,40%
100.000.001	**110.000.000**	541854	6303309	5940811	362498	8,60%	100%
TOTAL		**6303309**				**100%**	

Tabla 3. Análisis de los números primos comprendidos entre 2 y 110M con el teorema de: $Li(n) = \frac{n}{\ln(n)} + \frac{n}{(\ln(n))^2} + \frac{2n}{(\ln(n))^3}$.

Table 3. Analysis of the prime numbers between 2 and 110M with the theorem of: $Li(n) = \frac{n}{\ln(n)} + \frac{n}{(\ln(n))^2} + \frac{2n}{(\ln(n))^3}$.

Intervalo de números naturales		Cantidad de números primos	Cantidad de números primos acumulativa	Cantidad con el Teorema $Li(n) = \frac{n}{\ln(n)} + \frac{n}{(\ln(n))^2} + \frac{2n}{(\ln(n))^3}$	Diferencia entre las cantidad números primos acumulativa y Li(n)	Porcentaje de números primos	Porcentaje de números primos acumulativa
2	**10.000.000**	664579	664579	663689	890	10,54%	10,54%

10.000.001	**20.000.000**	606028	1270607	1268866	1741	9,61%	20,16%
20.000.001	**30.000.000**	587252	1857859	1855460	2399	9,32%	29,47%
30.000.001	**40.000.000**	575795	2433654	2430604	3050	9,13%	38,61%
40.000.001	**50.000.000**	567480	3001134	2997522	3612	9,00%	47,61%
50.000.001	**60.000.000**	560981	3562115	3558053	4062	8,90%	56,51%
60.000.001	**70.000.000**	555949	4118064	4113382	4682	8,82%	65,33%
70.000.001	**80.000.000**	551318	4669382	4664332	5050	8,75%	74,08%
80.000.001	**90.000.000**	547572	5216954	5211512	5442	8,69%	82,77%
90.000.001	**100.000.000**	544501	5761455	5755384	6071	8,64%	91,40%
100.000.001	**110.000.000**	541854	6303309	6296315	6994	8,60%	100%
TOTAL		**6303309**				**100%**	

El siguiente gráfico muestra el comportamiento de la cantidad de números primos en el intervalo analizado, es decir:

Gráfica 1. Cantidad de números primos de 2 – 110 M.
Graph 1. Number of prime numbers from 2 - 110 M.

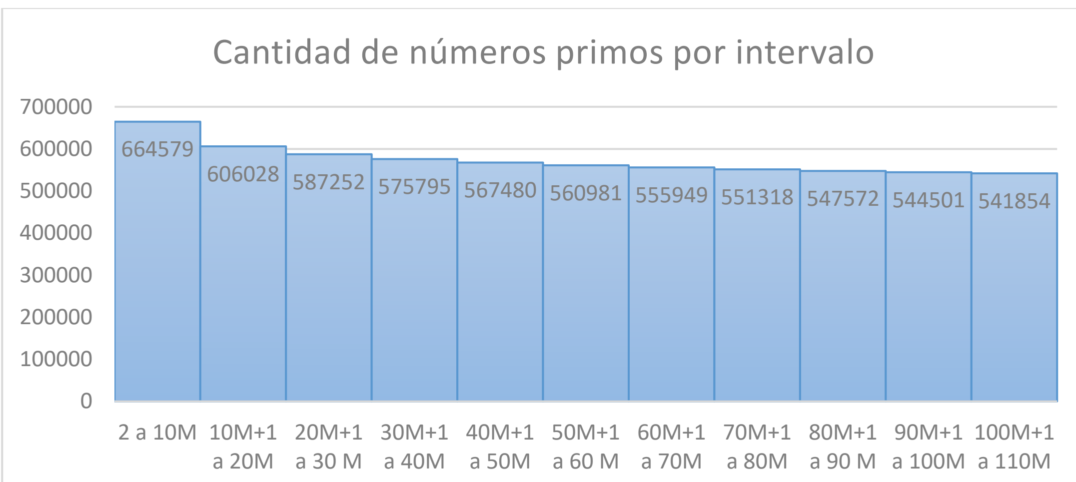
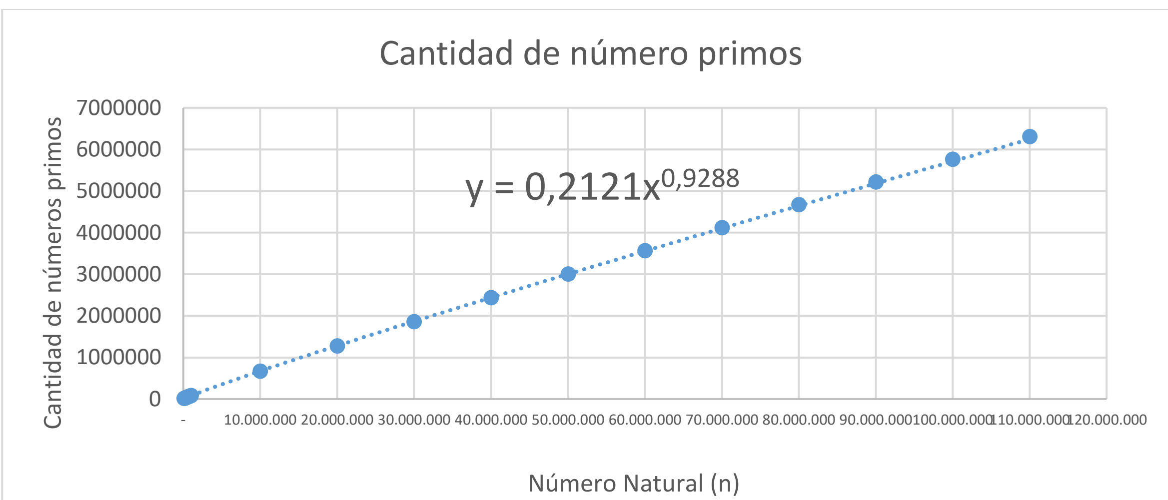


Tabla 4. Cantidad de números primos por intervalos de 2 a 110M.
Table 4. Quantity of prime numbers by intervals from 2 to 110M.

Intervalo de números		**Cantidad de números primos en el intervalo**	**Cantidad de números primos acumulativa**	**Tendencia de la función**	**Error relativo %**
Límite inferior	**Límite superior**				
2	**100.000**	9592	9592	9344	2,58%
100.001	**200.000**	8392	17984	17788	1,09%
200.001	**300.000**	8013	25997	25923	0,28%
300.001	**400.000**	7863	33860	33864	0,01%
400.001	**500.000**	7678	41538	41662	0,30%
500.001	**600.000**	7560	49098	49350	0,51%
600.001	**700.000**	7445	56543	56947	0,71%

700.001	**800.000**	7408	63951	64466	0,81%
800.001	**900.000**	7323	71274	71919	0,90%
900.001	**1.000.000**	7224	78498	79312	1,04%
2	**10.000.000**	664579	664579	673195	1,30%
10.000.001	**20.000.000**	606028	1270607	1281555	0,86%
20.000.001	**30.000.000**	587252	1857859	1867630	0,53%
30.000.001	**40.000.000**	575795	2433654	2439686	0,25%
40.000.001	**50.000.000**	567480	3001134	3001539	0,01%
50.000.001	**60.000.000**	560981	3562115	3555392	0,19%
60.000.001	**70.000.000**	555949	4118064	4102681	0,37%
70.000.001	**80.000.000**	551318	4669382	4644411	0,53%
80.000.001	**90.000.000**	547572	5216954	5181328	0,68%
90.000.001	**100.000.000**	544501	5761455	5714006	0,82%
100.000.001	**110.000.000**	541854	6303309	6242897	0,96%

Gráfica 2. Tendencia de la cantidad de números primos.
Graph 2. Trend of the number of prime numbers.



La cantidad de números primos que hay de 2 - 110M es 6303309

La suma de los inversos de los números primos de 2 - 110M es:

$$\sum_{p=2}^{109999993} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{109999937} + \frac{1}{109999957} + \frac{1}{109999993} = 3{,}18009042$$

La suma de los inversos de los números primos gemelos de 3 - 110M es:

$$\sum_{p=3}^{109999861} \frac{1}{p} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{109999859} + \frac{1}{109999861} = 1{,}75959809$$

La suma de los inversos de los números naturales de 1 - 110M es:

$$\sum_{n=1}^{110M} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{109\ 999\ 998} + \frac{1}{109\ 999\ 999} + \frac{1}{110\ 000\ 000} = 18{,}9978851$$

La siguiente tabla resume esta información

Tabla 5. Análisis de los números primos de 2 – 110M.
Table 5. Analysis of the prime numbers of 2 - 110M.

Cantidad de números primos de: 2 - 110M:	6303309
Total de la suma de inverso de primos de: 2 - 110 M:	3,18009042
Total de los inversos de los números primos gemelos de: 3 - 110M es:	1,7595809
Total de la suma de los inversos de los números naturales de: 1 - 110M:	18.9978851

A continuación, se encuentra el análisis de la diferencia entre números primos consecutivos, es decir: $D = |p_i - p_{i-1}|$

Tabla 6. Diferencia entre números primos consecutivos, es decir: $D = |p_i - p_{i-1}|$.
Table 6. Difference between consecutive prime numbers, that is: $D = |p_i - p_{i-1}|$.

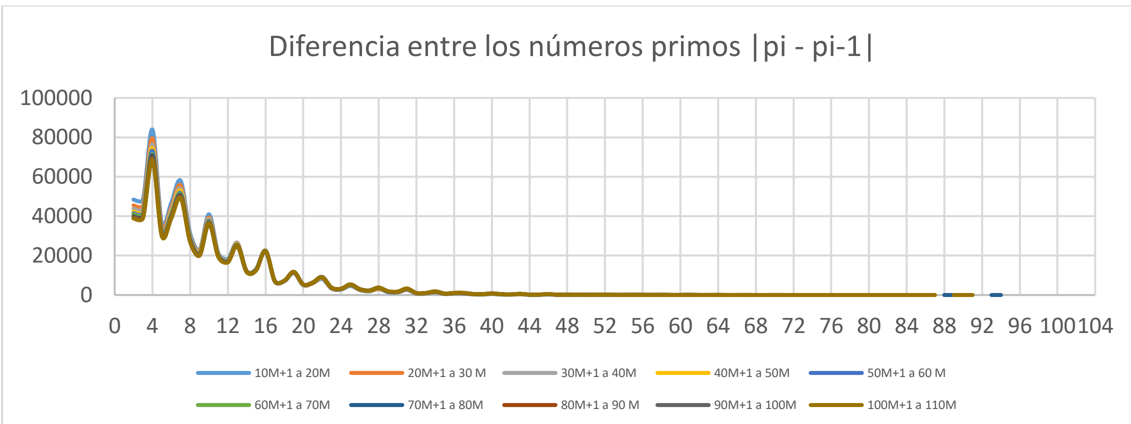
|pi - pi-1|	2 a 10M	10M+1 a 20M	20M+1 a 30 M	30M+1 a 40M	40M+1 a 50M	50M+1 a 60 M	60M+1 a 70M	70M+1 a 80M	80M+1 a 90 M	90M+1 a 100M	100M+1 a 110M	Frecuencia (fi)	Frecuencia relativa (hi) %
1	1											1	0,0000%
2	58980	48427	45484	43861	42348	41457	40908	39984	39640	39222	38817	479128	7,6012%
4	58621	48460	45494	43657	42377	41595	40994	40147	39678	39233	38977	479233	7,6029%
6	99987	83924	79512	76318	74567	73080	71560	70949	69826	69029	68428	837180	13,2816%
8	42352	36440	34576	33161	32519	32137	31528	30671	30694	30102	29909	364089	5,7762%
10	54431	46767	44328	42983	41767	40893	40413	39882	39538	39014	38815	468831	7,4379%
12	65513	57897	55517	53836	52854	51606	51146	50538	49994	49480	49106	587487	9,3203%
14	35394	31368	29809	29302	28589	28332	27979	27989	27088	27351	27088	320289	5,0813%
16	25099	22852	22312	21593	21406	20919	20694	20580	20310	20039	19958	235762	3,7403%
18	43851	40931	39389	38657	38058	37690	36991	36248	36606	36317	36280	421018	6,6793%
20	22084	21200	20682	20483	20289	19880	19540	19870	19458	19435	19174	222095	3,5235%
22	19451	18335	17738	17914	17460	17311	17099	17005	16693	16939	16564	192509	3,0541%
24	27170	26505	26292	25952	25804	25485	25386	25143	25062	24749	24889	282437	4,4808%
26	12249	12138	12211	11903	11966	11799	11894	11839	11787	11678	11646	131110	2,0800%
28	13255	13237	12960	12979	13022	12817	13019	12804	12702	12771	12449	142015	2,2530%
30	21741	22530	22320	22402	22356	22415	22306	22184	22302	22291	22457	245304	3,8917%
32	6364	6813	6793	6877	6850	6817	7011	6872	6853	7041	6957	75248	1,1938%
34	6721	7004	7090	7140	7213	7253	7227	7122	7248	7230	7234	78482	1,2451%
36	10194	11169	11378	11387	11594	11594	11635	11573	11741	11762	11723	125750	1,9950%
38	4498	4986	5148	5301	5191	5259	5306	5358	5345	5363	5334	57089	0,9057%
40	5318	5953	5979	6073	5997	6192	6305	6277	6283	6384	6369	67130	1,0650%
42	7180	8138	8590	8673	8784	8918	8978	9185	9110	9081	9069	95706	1,5183%
44	2779	3254	3402	3510	3537	3594	3704	3706	3630	3765	3734	38615	0,6126%
46	2326	2751	2945	2925	2966	3112	3008	3115	3099	3080	3206	32533	0,5161%
48	3784	4585	4876	5158	5113	5152	5140	5294	5350	5372	5385	55209	0,8759%
50	2048	2512	2578	2800	2912	2818	2899	2985	3008	2961	2997	30518	0,4842%
52	1449	1878	1977	2018	2116	2140	2140	2324	2234	2319	2215	22810	0,3619%

54	2403	3024	3081	3428	3423	3617	3532	3699	3653	3733	3782	37375	0,5929%
56	1072	1440	1675	1693	1727	1701	1800	1744	1861	1882	1950	18545	0,2942%
58	1052	1275	1391	1449	1490	1562	1522	1617	1625	1628	1713	16324	0,2590%
60	1834	2513	2666	2809	2974	3046	3012	3146	3227	3212	3300	31739	0,5035%
62	543	739	812	819	901	892	908	948	982	952	1025	9521	0,1510%
64	559	788	846	853	880	910	952	1009	990	1036	1024	9847	0,1562%
66	973	1305	1461	1533	1576	1699	1663	1693	1791	1885	1819	17398	0,2760%
68	358	493	551	621	627	707	699	698	713	733	783	6983	0,1108%
70	524	706	797	878	911	964	982	1008	1011	1032	1074	9887	0,1569%
72	468	609	791	768	851	881	1025	1010	1054	996	1096	9549	0,1515%
74	218	355	380	438	421	482	460	495	556	511	502	4818	0,0764%
76	194	250	337	371	368	399	382	406	418	455	449	4029	0,0639%
78	362	493	650	675	695	703	764	800	830	818	792	7582	0,1203%
80	165	245	284	319	333	361	372	387	408	407	434	3715	0,0589%
82	100	185	209	228	269	237	264	294	264	312	310	2672	0,0424%
84	247	354	413	424	459	528	536	565	581	561	579	5247	0,0832%
86	66	108	132	143	176	184	194	175	226	193	201	1798	0,0285%
88	71	99	153	163	190	174	210	181	212	184	213	1850	0,0293%
90	141	265	309	290	354	356	392	427	401	402	453	3790	0,0601%
92	37	72	107	93	127	118	127	119	137	146	143	1226	0,0195%
94	39	65	91	104	84	105	123	113	117	130	120	1091	0,0173%
96	65	105	117	135	157	214	195	213	222	218	230	1871	0,0297%
98	29	52	73	68	74	103	117	112	107	116	94	945	0,0150%
100	36	61	86	90	87	71	121	96	115	115	118	996	0,0158%
102	34	62	78	90	103	122	153	129	154	134	159	1218	0,0193%
104	21	34	53	39	59	40	57	52	71	68	93	587	0,0093%
106	12	27	23	37	53	49	57	46	55	45	69	473	0,0075%
108	26	56	51	65	78	90	95	86	78	86	83	794	0,0126%
110	11	33	35	44	46	57	52	51	72	53	51	505	0,0080%
112	11	23	26	29	37	39	32	37	45	51	48	378	0,0060%
114	11	35	33	46	59	64	63	48	56	72	62	549	0,0087%
116	7	10	13	17	21	25	20	22	26	30	29	220	0,0035%
118	4	8	18	19	24	22	25	20	13	28	30	211	0,0033%
120	10	22	37	40	50	46	57	56	54	61	51	484	0,0077%
122	3	4	12	19	15	13	19	14	12	20	15	146	0,0023%
124	4	3	9	8	22	12	22	17	24	24	16	161	0,0026%
126	8	17	18	10	22	28	22	24	26	29	38	242	0,0038%
128	2	3	3	6	7	9	8	15	8	15	9	85	0,0013%
130	1	1	7	9	1	6	13	9	19	12	15	93	0,0015%
132	5	6	10	11	18	20	11	19	13	19	22	154	0,0024%
134	1	5	3	4	5	5	7	5	5	10	5	55	0,0009%
136	2	2	4	5	2	6	8	3	5	3	8	48	0,0008%
138	1	5	6	10	13	8	9	11	13	16	12	104	0,0016%
140	2	4	2	8	6	4	5	8	9	9	8	65	0,0010%
142	0	2	2	2	3	6	3	7	3	2	3	33	0,0005%
144	0	2	6	4	4	7	8	5	2	13	8	59	0,0009%
146	1		2		1	3	5	6	1	3	2	24	0,0004%
148	2	1		4	6	3	8	5	2	3	3	37	0,0006%
150	0	2	3	4	3	3	7	6	4	5	6	43	0,0007%
152	1	1		2	1	2	5	1	5	2	2	22	0,0003%
154	1	2				2	3		1	4	1	14	0,0002%
156	0	1	2		2	3	4	5	3	3	2	25	0,0004%
158	0				1	1	2		4	2	2	12	0,0002%
160				1		1	1	2	4	2	1	12	0,0002%
162				1	3			2		2	1	9	0,0001%
164			1		1		1	1		1	3	8	0,0001%
166									1		1	2	0,0000%
168				1	1	1	2	1	1	1	3	11	0,0002%
170			1				1		2	2	1	7	0,0001%
172				1							1	2	0,0000%
174						1		2				3	0,0000%
176				1	1	1		1		1	1	6	0,0001%
178				1		2	1				2	6	0,0001%
180		1								3	1	5	0,0001%

182				1								1	0,0000%
184								1				1	0,0000%
196								1				1	0,0000%
198					1							1	0,0000%
202											2	2	0,0000%
204												0	0,0000%
210			1							1		2	0,0000%
220					1							1	0,0000%
TOTAL	**664577**	**606027**	**587251**	**575794**	**567479**	**560980**	**555948**	**551317**	**547571**	**544500**	**541853**	**6303297**	**100%**

El comportamiento gráfico de tabla anterior es:

Gráfico 3. Comportamiento de las diferencias entre los números primos
Graph 3. Behavior of differences between prime numbers



3.4 EL TRIANGULO DE LOS NÚMEROS PRIMOS

El triángulo de los números primos se construye siguiendo un patrón como el que se muestra en la figura una (1). Se comienza desde la cúspide con el número 1, en los lados del triángulo hacia abajo se escriben los números primos, se clasifican las filas y las columnas, empezando por la fila cero (el 1 o cúspide) y la columna cero la columna central. Si se suman los dos números primos ubicados en lados del triángulo de la misma fila nos dará un resultado que ubicaremos en la columna central del triángulo. Los números que están entre la columna central y lado del triángulo se encuentran de la siguiente manera:

Para el número de la fila 2 y columna 1:
N(2,1) = P(3,3)+P(1,1)=5+2=7

Para los números de la fila 3:
N(3,1)= P(4,4)+P(2,2)=7+3=10
N(3,2)= P(5,5)+P(1,1)=11+2=13

Para los números de la fila 4:
N(4,1)= P(5,5)+P(3,3)=11+6=16
N(4,2)= P(6,6)+P(2,2)=13+3=16
N(4,3)= P(7,7)+P(1,1)=17+2=19

Para los números de la fila n:

N(n,1)= P(n+1,n+1)+P(n-1,n-1)
N(n,2)= P(n+2,n+2)+P(n-2,n-2)
⋮
N(n,n-1)= P(2n-1,2n-1)+P(1,1)
Si a los números que están en las diagonales internas del triángulo se le resta el primo correspondiente de su diagonal se obtiene un número primo. Ejemplo el número 7 se encuentra en la diagonal 1, la cual tiene como número primo en esa diagonal al 2, luego 7 - 2 = 5 que es numero primo. Otro ejemplo es que el número 22 se encuentra la diagonal 2, que tiene como número primo en esa diagonal al 3, si calculamos 22 – 3 = 19 que es un número primo. Con base en el análisis anterior se puede afirmar que: **“*la diferencia entre cualquier número natural del el triángulo y su respectivo número primo de su diagonal da como resultado un número primo*”**.

Figura 1. El triángulo de los números primos.
Figure 1. The triangle of prime numbers.

																			Números primos															
																			PD1	PD2	PD3	PD4	PD5	PD6	PD7	PD8	PD9	PD10	PD11	PD12	PD13	PD14	PD15	
																			2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	
																	1																	
																2	4	2																
															3	7	6	7	3															
														5	13	10	10	10	13	5														
													7	19	16	16	14	16	16	19	7													
												11	25	22	22	20	22	20	22	22	25	11												
											13	33	32	28	26	28	26	28	26	28	32	33	13											
										17	43	40	36	36	34	32	34	32	34	36	36	40	43	17										
									19	49	46	46	44	42	42	40	38	40	42	42	44	46	46	49	19									
								23	61	56	52	50	52	50	48	48	46	48	48	50	52	50	52	56	61	23								
							29	69	64	64	60	58	56	58	56	54	58	54	56	58	56	58	60	54	64	69	29							
						31	75	74	72	68	70	66	64	62	64	66	62	66	64	62	64	66	70	68	72	74	75	31						
					37	85	82	78	78	78	74	76	72	70	72	72	74	72	72	70	72	76	74	78	78	78	82	85	37					
				41	99	92	88	86	84	84	84	80	82	82	78	80	82	80	78	82	82	80	84	84	84	86	88	92	99	41				
			43	105	104	102	96	94	92	90	90	90	90	90	90	88	86	88	90	90	90	90	90	90	92	94	96	102	104	105	43			
		47	111	110	108	108	108	102	100	98	96	100	98	98	100	96	94	96	100	98	98	100	96	98	100	102	108	108	108	110	111	47		
	53	129	116	114	114	114	114	114	108	106	108	104	108	108	104	106	106	106	104	108	108	104	108	106	108	114	114	114	114	114	116	129	53	
DP	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16		D16	D15	D14	D13	D12	D11	D10	D9	D8	D7	D6	D5	D4	D3	D2	D1	DP

A continuación, se especifican las notaciones empleadas en el triángulo de los números primos:

DP: Diagonal de números primos
D1: Diagonal 1 de números naturales que al restarle 2 da un número primo
D2: Diagonal 2 de números naturales que al restarle 3 da un número primo
D3: Diagonal 3 de números naturales que al restarle 5 da un número primo
Dn: Diagonal n de números naturales que al restarle el primo de su diagonal da un número primo

PD1: Primo de la diagonal 1
PD2: Primo de la diagonal 2
PD3: Primo de la diagonal 3
PDn: Primo de la diagonal n

4. CONCLUSIONES

El papel de los números primos en la vida común y académica es importante, sin su aplicación en los algoritmos criptográficos, se viviría en un caos e inseguridad digital, pues, gracias a ellos, se pueden realizar hoy en día las transacciones bancarias por la Internet o los pagos con tarjetas débitos o créditos. Lo especial de los números primos, es que estos construyen los demás números, sin saber cómo se han construidos ellos. En cuanto a su distribución no existe un patrón a seguir, lo que hace caótica su predicción, aunque, con los ordenadores se pueden conseguir patrones o secuencias para un determinado conjunto finito de números. El tamaño o magnitud del número que se desea analizar por un ordenador está en función del número máximo con que fue diseñada la memoria interna del computador. Es por ello, que para saber si un número de gran tamaño es primo se requieren de computadores con magna capacidad de bites en la memoria para poder implementar los algoritmos matemáticos que verifican si el número es primo o no. Es importante resaltar que las teorías sobre los números primos, realizadas por los matemáticos en tiempos donde no existían los ordenadores, siguen asombrando por la aproximación de los resultados que arrojan actualmente los estudios de los números primos.

5. REFERENCIAS

[1] L. Jiménez, J. Gordillo, G. Rubiano, *Teoría de Números para principiantes*, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[2] J. Dávila, “32 años de criptografía asimétrica y de clave pública”, *SIC*, nº 78, pp. 102-104, 2008.

[3] O. Trejos, “Determinación simple de un número primo aplicando programación funcional a través de Drscheme”, *Revista Scientia et Technica,* 19(45), pp. 1-2, 2010.

[4] P. G. Bejarano, “Cual es el número primo más alto conocido”, *[online]*. *Available*: https://blogthinkbig.com/cual-es-el-numero-primo-mas-alto-conocido (Acceso 15 de julio 2020).

[5] F. C. Lorente, “Euler y la teoría de números”, *[online]*. *Available*: https://studylib.es/doc/6110539/euler-y-la-teor%C3%ADa-de-n%C3%BAmeros-1.-en-el-siglo-xviii (Acceso 14 de julio 2020).

[6] D. Zagier, “Números Primos”, *[online]*. *Available*: http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/primos.htm (Acceso 14 de julio 2020).

[7] J. Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant* (tapa dura). Princeton University Press (2003): 163..

[8] P. L. Chebyshev, «Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes», *Mémoires des Savants étrangers présentés à l’Académie de Saint-Pétersbourg*, Vol. 7, pig. 539–586, 1854.

[9] J. J. Sylvester. «On a point in the theory of vulgar fractions». *American Journal of Mathematics* **3** (4): 332-335. 1880.

[10] Erdós, P.: “On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem” Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol 35, pp. 374-384, 1949.

[11] Selberg, A.: “An elementary proof of the prime number Theorem” Annals of Mathematics, Vol 50 No. 2, April, pp. 305-313, 1949.

[12] S. Skewes, “Números de Skewes”, *[online]*. *Available*: https://sites.google.com/site/pointlesslargenumberstuff/home/1/skewes (Acceso 14 de julio 2020).

[13] C. Mathworks, “Matlab. Lenguaje para computadores”, *[online]*. *Available*: https://la.mathworks.com/ (Acceso 4 de julio 2019).

[14] J. C. Romero, S. Nieves, and G. M. Vergara. “Simulación y programación del sistema que rige el péndulo compuesto”. *Revista Prospectiva*, 18 (1), pp. 75-83, 2020.