

# Simulación y programación del sistema que rige el péndulo compuesto

## Simulation and programming of the system that rules the compuest pendulum

Julio Cesar Romero Pabón<sup>1</sup>, Sergio Samuel Nieves Vanegas<sup>2</sup>, Gabriel Mauricio Vergara Ríos<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Doctor en Ciencias de la Educación Mención Matemáticas. Profesor Titular. Universidad del Atlántico. Grupo de investigación de Sistemas Dinámicos y EDO. Barranquilla. Colombia.

<sup>2</sup>Magister en Estadística. Profesor Titular. Universidad Autónoma del Caribe. Grupo de investigación de GMA. Barranquilla. Colombia.

<sup>3</sup>Doctor en Ciencias de la Educación Mención Matemáticas. Profesor Titular. Universidad del Atlántico. Grupo de investigación de Sistemas Dinámicos y EDO. Barranquilla. Colombia.  
Email: julioromero@mail.uniatlantico.edu.co

Cite this article as: J. C. Romero Pabón, S. S. Nieves Vanegas, G. M. Vergara Ríos "Simulation and programming of the system that rules the compuest pendulum", *Prospectiva*, Vol 18, N° 1, 75-83, 2020.

**Recibido: 20/08/2018 / Aceptado: 16/10/2019**

<https://doi.org/10.15665/rp.v18i1.2097>

### RESUMEN

*El estudio sobre el problema del péndulo compuesto por teorías de aproximación permite comprender el comportamiento numérico de la ecuación diferencial que rige dicho suceso. En este análisis se soluciona la ecuación diferencial de forma analítica y numérica, para la solución numérica se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden para un sistema de ecuaciones diferenciales, posteriormente se calculan las raíces usando los métodos de Bisección y de Newton Raphson de la función que se obtiene de solucionar la ecuación diferencial del péndulo compuesto utilizando el razonamiento analítico. También se hace el análisis y comparación de la efectividad de los métodos empleados tanto para la solución de ecuaciones diferenciales como para el cálculo de raíces.*

*Palabras claves: péndulo compuesto, ecuación diferencial, teoría de aproximación, Runge-Kutta, Bisección y Newton Raphson.*

### ABSTRACT

*The study on the problem of the pendulum made up of approximation theories allows to understand the numerical behavior of the differential equation that governs this event. In this analysis the differential equation is solved analytically and numerically, for the numerical solution we used the Runge-Kutta method of fourth order for a system of differential equations, later we calculate the roots using the Bisection and Newton methods of the function that is obtained to solve the differential equation of the compound pendulum using the analytical reasoning. The analysis and comparison of the effectiveness of the methods used for both the solution of differential equations and for the calculation of roots is also done.*

*Keywords: compound pendulum, differential equation, approximation theory, Runge-Kutta, Bisection and Newton Raphson.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En este documento se presenta una investigación cualitativa y cuantitativa del péndulo compuesto, el cual es tema de mucha importancia y aplicabilidad en las ciencias básicas y en las ingenierías. El resultado de este estudio nos llevará a una ecuación diferencial muy interesante que rige el movimiento del péndulo compuesto. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que se resolverá usando dos líneas de las matemáticas, como son los métodos analítico o exacto y el numérico o aproximado. Una vez solucionada la ecuación diferencial se mostrarán los resultados y comparaciones de cada uno de los métodos empleado.

Para hallar la solución general analíticamente de la ecuación diferencial se usará el método que emplea la solución homogénea y la solución particular. Mientras que para solucionar numéricamente la ecuación diferencial es necesario realizar un trabajo matemático llevarla a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, para así poder emplear el método que solucionan ecuaciones de primer orden como lo es el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Una vez obtenida la función  $\theta(t)$  que es solución de la ecuación diferencial, se analizará su gráfica, y para esto es necesario calcular sus raíces, las cuales se encontrarán usando métodos de aproximación cerrado y abiertos como son el método de bisección y de Newton Raphson respectivamente, esto permitirá analizar tanto las raíces como la efectividad de cada uno de estos métodos.

## 2. TEORÍA

Un péndulo físico o compuesto es todo cuerpo que puede oscilar alrededor de un eje fijo. Cuando el péndulo oscila alrededor de un punto, toma este nombre de centro de suspensión; y si se verifica el movimiento alrededor de una recta horizontal, esta recta se llama eje de suspensión. El péndulo compuesto es el único que se puede construir; se le dan las formas que se le quiere, pero en general, consiste en una masa metálica, lenticular o esférica, suspendida de una varilla móvil alrededor de un eje horizontal, como las péndolas de los relojes [1]. El péndulo en ingeniería es estudiado por sus diversas aplicaciones en el mundo actual, pues es empleado para: medir el tiempo, en los metrónomos, para ubicar y trazar líneas perpendiculares a una superficie y que apunten al centro de la tierra como lo hacen las plomadas, también es usado para contrarrestar los fuertes vientos y movimientos sísmicos en edificios, edificaciones grandes o puentes que requieran de una ingeniería sísmos resistente, también se utiliza para los estudios de suelos donde existen movimientos sísmicos.

En las ciencias física el péndulo está dado por un sistema con un solo grado de libertad, que está dado por la rotación

alrededor del eje fijo ver la Figura 1. La posición del péndulo en cualquier instante está determinada por el ángulo  $\theta$  que forma el plano determinado por el eje de rotación y el centro de gravedad ( $G$ ) del péndulo con el plano vertical que pasa por el eje de rotación.

Para el modelado del péndulo compuesto es necesario analizar la soluciones analíticas y numéricas, la solución analítica de una ecuación diferencial consiste en expresar la solución por medio de una expresión matemática explicita que permita, al sustituir los valores de la derivada independiente, obtener los valores de la función incógnita [2]. En nuestro caso es la ecuación diferencial de segundo orden que, junto con las condiciones iniciales, constituye un problema de valor inicial. La solución numérica es la simulación digital que consiste en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, usando para ello un método numérico incorporado en una computadora digital. Dependiendo de los recursos del usuario, puede emplearse desde un lenguaje de programación de propósito general, hasta un software especializado. En nuestro estudio realizaremos la simulación bajo el ambiente de programación de Matlab.

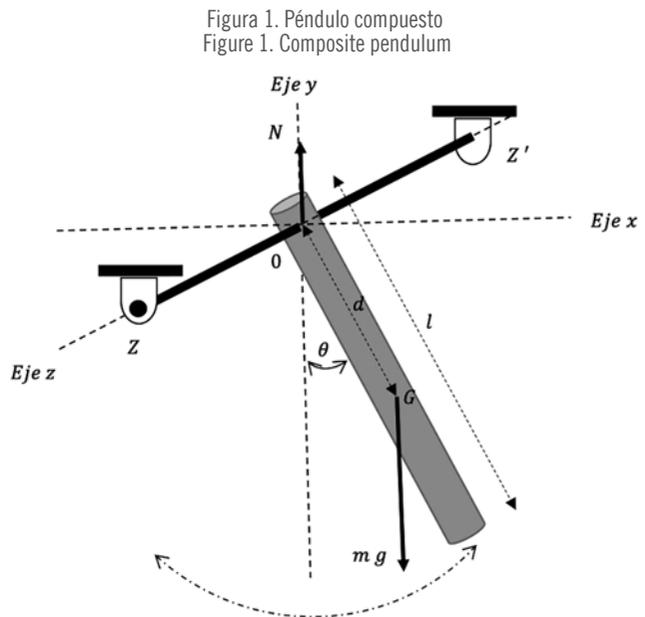


Figura 1. Péndulo compuesto  
Figure 1. Composite pendulum

Para el análisis cualitativo del péndulo compuesto se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

- $l$  = Longitud de la varilla
- $G$  = Centro de gravedad de la varilla.
- $d$  = La distancia del centro de gravedad ( $G$ ) del péndulo al eje de rotación  $Z Z'$ .
- $\theta$  = Angulo que forma la varilla con el eje  $y$ .
- $m$  = Masa de la varilla.
- $g$  = Aceleración de la gravedad.

$m g$  = Peso de la varilla  
 $N$  = Fuerza normal en el eje de giro

Cuando el péndulo está desviado de su posición de equilibrio (estable) un ángulo  $\theta$ , actúan sobre él dos fuerzas el peso y la normal, cuyo momento resultante con respecto al punto  $O$  es un vector dirigido a lo largo del eje de rotación  $Z Z'$ , en el sentido negativo del mismo, esto es:

$$M_0 = -m g d \text{ sen}\theta \quad (1)$$

Si es  $I_0$  el momento de inercia del péndulo respecto al eje de suspensión  $Z Z'$  y llamamos  $d^2\theta/dt^2$  a la aceleración angular del mismo, el teorema del momento angular nos permite escribir la ecuación diferencial del movimiento de rotación del péndulo:

$$-m g d \text{ sen}\theta = I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2)$$

De donde se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m g d}{I_0} \text{ sen}\theta = 0 \quad (3)$$

La cual es una ecuación diferencial de segundo orden, del mismo tipo que la que encontramos para el péndulo simple. En el caso de que la amplitud angular de las oscilaciones sea pequeña, podemos aplicar la siguiente aproximación  $\text{sen } \theta \cong \theta$  y la ecuación anterior adopta la forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m g d}{I_0} \theta = 0 \quad (4)$$

Ecuación diferencial que rige un movimiento armónico simple. La frecuencia angular y el periodo de las oscilaciones está dado por:

$$\omega^2 = \frac{m g d}{I_0} \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{I_0}{m g d}}$$

Por el teorema de Steiner

$$I_0 = I_c + m d^2 = m R^2 + m d^2$$

Donde  $R$  se denomina radio de giro, para una varilla  $R^2 = l^2/12$ , siendo  $l$  la longitud de la varilla.

### 2.1. Aplicación del método de runge-kutta a la ecuación diferencial que rige el péndulo compuesto.

Utilizaremos el método de Runge-Kutta para solucionar la ecuación diferencial ordinaria de orden dos.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m g d}{I_0} \theta = 0 \quad (5)$$

Sujeta a unas condiciones iniciales.

Para  $0 \leq t \leq 1$  con  $\theta(0) = 5$   $\theta'(0) = 6$

Con:  $l = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ mt}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $d = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ mt}$

Solución: Se sabe que  $I_0 = mR^2 + md^2$ , substituyendo en la ecuación diferencial tenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m g d}{mR^2 + md^2} \theta = 0 \quad (6)$$

Donde  $R$  se denomina radio de giro, para una varilla  $R^2 = l^2/12$ , siendo  $l$  la longitud de la varilla.

Los método de Runge-Kutta tiene un error local de truncamiento de orden alto, como los métodos de Taylor, pero permiten prescindir del cálculo y evaluación de las derivadas de  $f(t,y)$  la deducción de este método se fundamenta en el teorema de Taylor para dos variables [3]. En este estudio emplearemos el Método de Runge-Kutta de cuarto orden, ya que este tiene un error de truncamiento de orden cuatro, siempre que la solución  $y(t)$  tenga cinco derivadas continuas.

Para aplicar el método de Runge de Kutta transformaremos esta ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Esto se logra haciendo:

$$u_1(t) = \theta(t) \quad \text{y} \quad u_2(t) = \theta'(t),$$

Substituyendo en la ecuación diferencial tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2(t) \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{m g d}{mR^2 + md^2} u_1(t) \end{cases} \quad (7)$$

Con las condiciones iniciales:

$$u_1(0) = \theta(0) = 5 \quad \text{Para } 0 \leq t \leq 1$$

$$u_2(0) = \theta'(0) = 6 \quad \text{Para } 0 \leq t \leq 1$$

Llamaremos:

$$f_1(t, u_1, u_2) = \frac{du_1}{dt} = u_2(t) \quad (8)$$

$$f_2(t, u_1, u_2) = \frac{du_2}{dt} = -\frac{m g d}{mR^2 + md^2} u_1(t) \quad (9)$$

Una vez transformada la ecuación diferencial de segundo orden a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se le aplican los métodos de Runge Kutta en este caso aplicaremos el método de cuarto orden de RK, por ser el más clásico de estos métodos, el cual consiste en:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h \quad \text{Ecuación 10} \quad (10)$$

Con  $k_1 = f(x_i, y_i)$  (11)

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (12)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad (13)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad (14)$$

Aplicando el método de RK de cuarto orden a cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema se tiene:

La ecuación  $f_1(t, u_1, u_2) = \frac{du_1}{dt} = u_2(t)$  quedará:

$$u_{1i+1} = u_{1i} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (15)$$

Con

$$k_1 = f_1(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f_1(x_i + h, y_i + k_3h)$$

Y la ecuación  $f_2(t, u_1, u_2) = \frac{du_2}{dt} = -\frac{mgd}{mR^2+md^2}u_1(t)$  será:

$$u_{2i+1} = u_{2i} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (16)$$

Con

$$k_1 = f_2(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f_2(x_i + h, y_i + k_3h)$$

para calcular las raíces de la solución analítica se utilizó el método de bisección y el método de Newton. El método de bisección es un método de búsqueda incremental aprovechan esta característica localizando un intervalo en el que la función cambie de signo. Entonces, la localización del cambio de signo (y, en consecuencia, de la raíz) se logra con más exactitud al dividir el intervalo en varios subintervalos. Se investiga cada uno de estos subintervalos para encontrar el cambio de signo. El proceso se repite y la aproximación a la raíz mejora cada vez más en la medida que los subintervalos se dividen en intervalos cada vez más pequeños [4]. Mientras que el método de Newton-es uno de los que más ampliamente se utilizan. Si el valor inicial para la raíz es  $x_i$ , entonces se puede trazar una tangente desde el punto  $[x_i, f(x_i)]$  de la curva. Por lo común, el punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada de la raíz. El método de Newton-Raphson se deduce a partir de esta interpretación geométrica (un método alternativo basa-

do en la serie de Taylor).

La teoría de aproximación para calcular raíces, derivadas. Integrales o solución de ecuaciones diferenciales es de gran aplicación en la actualidad es así como [5]. Dedujeron un nuevo conjunto de ecuaciones de diferencias finitas basadas en la serie de Taylor para el cálculo de propiedades ópticas no lineales de sistemas moleculares. Las expresiones se obtuvieron a partir de las ecuaciones generalizadas de diferencias finitas con grado y exactitud arbitrarios, corrigiendo el orden de magnitud del error de truncamiento en las componentes no-axiales de las hiperpolarizabilidades.

## 2.2. Programación en ambiente Matlab del estudio del péndulo compuesto

Para implementar el código de la simulación del péndulo compuesto se hará uso de MATLAB, el cual se caracteriza por combinar un entorno de escritorio perfeccionado para el análisis iterativo y los procesos de diseño con un lenguaje de programación que expresa las matemáticas de matrices directamente [6]. A continuación, se presenta la programación en Matlab.

```

clc
clear all
disp('***** SIMULACION DEL PROBLEMA DEL PENDULO
COMPUESTO *****')
disp('Ecuación diferencial a solucionar')
disp(' ')
disp('          d2y/dt2 + ((m*g*d)/(m*R^2+m*d^2))*y = 0')
disp(' ')
disp('con: y = ángulo teta en la ecuación del péndulo compuesto')
disp(' ')
disp('Valores de las constantes que intervienen en la ecuación diferencial')
disp('Longitud de la varilla del péndulo')
L=0.2
%L=input('Digite la longitud de la varilla: ')
disp('Masa de la varilla')
m=1
disp('Constante de la gravedad terrestre')
g=9.8
disp('Distancia entre el centro de masa y el centro de oscilación ')
d=0.05
disp('Radio de giro, para una varilla R^2=L^2/12, siendo L la longitud de
la varilla.')
R=L*(12)^(1/2)
syms t u1 u2
disp('Solución exacta')
Y_exc=dsolve('D2y+((m*g*d)/(m*R^2+m*d^2))*y=0','y(0)=5','Dy(0)=6'
,'t')
pretty(Y_exc)
dYexc=diff(Y_exc,'t');
disp(' ')
disp('Transformación a un sistema de ecuaciones lineales para poder
resolver con Runge Kutta de cuarto orden.')
disp('Hacemos: du1=u2 y u2=f1(t,u1,u2)')
disp('El Sistema de ecuaciones diferenciales quedará de la siguiente forma:
f1=du1=u2 y f2=du2, esto implica que:')
f1=u2
f2=(-(m*g*d)/(m*R^2+m*d^2))*u1
disp('Condiciones iniciales en función de: u1 y u2')

```

```

u10=5
u20=6

tf=1;
ti=0;
n=10;
h=(tf-ti)/n;
tc=ti;
for i=[1:n+1]
    u1=u10;
    u2=u20;
    t=ti;
    Ye(i)=eval(Y_exc);
    dYe(i)=eval(dYexc);
    K11=h*eval(f1);
    K12=h*eval(f2);
    t=ti+h/2;
    u1=u10+(1/2)*K11;
    u2=u20+(1/2)*K12;
    K21=h*eval(f1);
    K22=h*eval(f2);
    t=ti+h/2;
    u1=u10+(1/2)*K21;
    u2=u20+(1/2)*K22;
    K31=h*eval(f1);
    K32=h*eval(f2);
    t=ti+h;
    u1=u10+K31;
    u2=u20+K32;
    K41=h*eval(f1);
    K42=h*eval(f2);
    T(i)=tc;
    tc=tc+h;
    ti=tc;
    U1(i)=u10;
    U2(i)=u20;
    w1=u10+(1/6)*(K11+2*K21+2*K31+K41);
    w2=u20+(1/6)*(K12+2*K22+2*K32+K42);
    u10=w1;
    u20=w2;
end
error=abs(Ye-U1);
disp('Solución numérica por el método de Runge Kutta de cuarto orden para
un sistema de ec. dif.')
disp(' ')
disp('          U1=u10+(1/6)*(K11+2*K21+2*K31+K41): calcula la
solución numérica de Y(t)')
disp('          U2=u20+(1/6)*(K12+2*K22+2*K32+K42): calcula la
derivada numérica de Y(t)')
disp('_____')
disp(' t Sol_Exc Sol_Num Derv_Exc Derv_Num Error')
disp(' t Y(t) u1 dy/dt u2=dy/dt lY(t)-u1(t)l ')

disp('_____')
disp(['T' Ye' U1' dYe' U2' error' ])
disp('_____')

disp(' ')
disp('La grafica es')
plot(T,Ye,'+')
hold on
plot(T,U1,'--* r')
title('Graficos de: La solución exacta Y(t) (Línea solida). Y la solución
numérica u1(t) (línea punteada)')

```

```

xlabel('Eje t')
ylabel('Eje Y(t)')
grid on
disp(' ')
disp('***** Cálculo de raíz positiva más próxima a cero (0)*****')
clear t
syms t
Y_exc = 6*(R^2+d^2)^(1/2)/g^(1/2)/d^(1/2)*sin(1/(R^2+d^2)^(1/2)*g^(1/2)*d^(1/2)*t)+5*cos(1/(R^2+d^2)^(1/2)*g^(1/2)*d^(1/2)*t);
dYexc=diff(Y_exc);
disp('Función a la cual se le van a calcular las raíces')
Y_exc
disp(' ')
disp('*** METODO DE BISECCION ***')
disp('Criterio de parada o tolerancia')
tol=10^-6;
Tolerancia=tol
Inter=[0, 0.3];
a=Inter(1);
b=Inter(2);
errorbis=tol+1;
i=1;
while errorbis>tol
    t=a;
    fa=eval(Y_exc);
    t=b;
    fb=eval(Y_exc);
    r=(a+b)/2;
    t=r;
    fr=eval(Y_exc);
    R(i)=r;
    A(i)=a;
    B(i)=b;
    ltera(i)=i;
    if (fa*fr)<0
        b=r;
    else
        a=r;
    end

    if i==1
        errorb(i)=0;
    else
        errorb(i)=abs(r-r_ant);
        errorbis=errorb(i);
    end
    r_ant=r;
    i=i+1;
end
disp('_____')
disp(' iter Intervalo raíz error')
disp(' [a b] r=(a+b)/2 E=|r-ral')
disp('_____')
disp(['ltera' A' B' R' errorb'])
disp('_____')

disp(' ')
disp(' ')
disp('*** METODO DE NEWTON ***')
clear t
syms t
disp('Criterio de parada o tolerancia')
tol=10^-6;

```

```

Tolerancia=tol
P0=0.1;
errornew=tol+1;
i=1;
while errornew >= tol
    if i==1
        GWP = (int(a_i*c_i(t),t,P0)/int(a_CO2*c_CO2(t),t,P0))*m_i (5)
        ODP = (d[O3]_i)/(d[O3]_i*FCKW - 11)*m_i (6)
        PCOP = (a_i/b_i(t))/(a_C2H4/b_C2H4(t))*m_i (7)
        AP = (V_i/M_i)/(V_SO2/M_SO2)*m_i (8)
    else
        errornew=error(i);
    end
    xs_ant=xs;
    i=i+1;
end
disp('_____')
disp(' iter Raíz Error')
disp(' r=x-f/df E=|r-ral')
disp('_____')
disp(['iter' Rn' error'])
disp('_____')

```

### 3. RESULTADOS

Una vez programada en el ambiente de Matlab la simulación del péndulo compuesto, se puso a correr dicha simulación, arrojando la siguiente información:

#### 3.1. Ejecución del código programado en Matlab sobre el péndulo compuesto

Según [7], al aplicar el principio de conservación de la energía establece que la suma de la energía cinética de rotación del péndulo más potencial es constante. Para [8] la energía en un péndulo se puede apreciar cuando tiramos la masa a un lado y la liberamos, se balancea hacia adelante y hacia atrás. En su movimiento, pierde altura al ir desde cualquier extremo al centro. ¿A dónde va la energía potencial? La energía gravitacional desaparece cuando está abajo en el fondo; sin embargo, volverá a subir. La energía gravitacional debe haber pasado a otra forma. Evidentemente, es en virtud de su movimiento que puede escalar nuevamente, por lo que tenemos la conversión de la energía gravitacional en alguna otra forma cuando llega al fondo. Y según [9] la ecuación de movimiento del péndulo plano se obtiene con mayor facilidad igualando el momento de la fuerza respecto al eje de suspensión al producto de la aceleración angular por el momento de inercia del mismo eje. El análisis de los resultados anteriores de las energías que actúan en el péndulo llegan a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m g d}{I_0} \theta = 0 \quad (17)$$

Dónde:

$\theta$  = ángulo teta en la ecuación del péndulo compuesto

Valores de las constantes que intervienen en la ecuación diferencial:

Longitud de la varilla del péndulo:  $L = 0.2000$

Masa de la varilla:  $m = 1$

Constante de la gravedad terrestre:  $g = 9.8000$

Distancia entre el centro de masa y el centro de oscilación:  $d = 0.0500$

Radio de giro, para una varilla  $R^2 = l^2 / 12$ , siendo  $L$  la longitud de la varilla.  $R = 0.0577$

Solución exacta

$$\theta_{exc} = \frac{6(R^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}} \text{sen} \left( \frac{g^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} t}{(R^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + 5 \cos \left( \frac{g^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} t}{(R^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Transformación a un sistema de ecuaciones lineales para poder resolver con Runge Kutta de cuarto orden.

Hacemos:  $\frac{du_1}{dt} = u_2$  y  $u_2 = f(t, u_1, u_2)$

El Sistema de ecuaciones diferenciales quedará de la siguiente forma:  $f_1 = \frac{du_1}{dt} = u_2$  y  $f_2 = \frac{du_2}{dt}$ , esto implica que:  $f_1 = u_2$  y  $f_2 = u_1$

Condiciones iniciales en función de:  $u_1$  y  $u_2$ :  $u_{10} = 5$ ,  $u_{20} = 6$

Solución numérica por el método de Runge Kutta de cuarto orden para un sistema de ecuaciones diferenciales.

$u_1 = u_{10} + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})$ : calcula la solución numérica de  $Y(t)$

$u_2 = u_{20} + \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})$ : calcula la derivada numérica de  $Y(t)$

La solución exacta o analítica es:

$$\theta(t) = \frac{1}{7} \sqrt{21} \text{sen}(2\sqrt{21} t) + 5 \cos(2\sqrt{21} t)$$

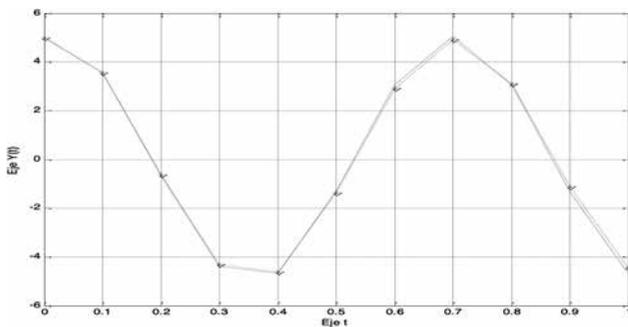
Resultados de la solución exacta y numérica en el intervalo de tiempo  $t=[0, 1]$  con un salto  $h=0.1$

Tabla 1. Solución exacta y numérica de la EDO  
Table 1. Exact and numerical solution of the ODE

t	Solución Exacta $\theta(t)$	Solución Numérica $u_1(t)=\theta(t)$	Derivada Exacta $d\theta/dt$	Derivada Numérica $u_2(t)=d\theta/dt$	Error $ \theta(t)-u_1(t) $
0	5.0000	5.0000	6.0000	6.0000	0
0.1	3.5624	3.5630	-32.7105	-32.4636	0.0006
0.2	-0.6639	-0.6206	-45.8146	-45.5224	0.0433
0.3	-4.3705	-4.2931	-23.0539	-23.2583	0.0774
0.4	-4.6558	-4.6164	17.7538	16.8398	0.0393
0.5	-1.2964	-1.3650	44.6635	43.6113	0.0686
0.6	3.0778	2.9187	36.6096	36.4377	0.1591
0.7	5.0427	4.9123	-0.1031	1.1203	0.1303
0.8	3.0600	3.0899	-36.7351	-34.8038	0.0299
0.9	-1.3181	-1.1101	-44.6100	-43.5310	0.2080
1.0	-4.6644	-4.4202	-17.5633	-18.5081	0.2442

La grafica de la solución exacta y numérica de la ecuación diferencial es:

Gráfica 1. Solución exacta línea sólida  $y(t)$ , y solución numérica línea punteada  $u_1(t)$   
Graph 1. Exact solution solid line and  $y(t)$ , and numerical solution dotted line  $u_1(t)$



La función a la cual se le van a calcular la raíz positiva más próxima a cero es la solución exacta de la EDO del péndulo compuesto, la cual es:

$$y(t) = \theta(t) = \frac{1}{7}\sqrt{21} \operatorname{sen}(2\sqrt{21} t) + 5 \operatorname{cos}(2\sqrt{21} t)$$

Aplicando el método de Bisección con un criterio de parada o tolerancia =  $10^{-6}$  se obtiene:

Tabla 2. Raíz con el método de bisección  
Table 2. Root with the bisection method

Iteración	Intervalo [ a b ]	Raíz $r=(a + b)/2$	Error =  r-ral
1	0 0.3000	0.1500	
2	0.1500 0.3000	0.2250	0.0750
3	0.1500 0.2250	0.1875	0.0375
4	0.1500 0.1875	0.1688	0.0187
5	0.1688 0.1875	0.1781	0.0094
6	0.1781 0.1875	0.1828	0.0047
7	0.1828 0.1875	0.1852	0.0023
8	0.1852 0.1875	0.1863	0.0012
9	0.1852 0.1863	0.1857	0.0006
10	0.1852 0.1857	0.1854	0.0003
11	0.1854 0.1857	0.1856	0.0001
12	0.1854 0.1856	0.1855	0.0001
13	0.1855 0.1856	0.1856	0.0000
14	0.1856 0.1856	0.1856	0.0000
15	0.1856 0.1856	0.1856	0.0000
16	0.1856 0.1856	0.1856	0.0000
17	0.1856 0.1856	0.1856	0.0000
18	0.1856 0.1856	0.1856	0.0000
19	0.1856 0.1856	0.1856	0.0000

La raíz calculada con el método de bisección es 0.1856 con una tolerancia de  $10^{-6}$

Al aplicar el método de Newton Raphson con un Criterio de parada o tolerancia =  $10^{-6}$  se obtiene:

Tabla 3. Raíz con el método de Newton Raphson  
Table 3. Root with the Newton Raphson method

Iteración	Raíz	Error =  r-ral
1	0.2089	0
2	0.1852	0.0237
3	0.1856	0.0004
4	0.1856	0.0000

La raíz calculada con el método de Newton Raphson es 0.1856 con una tolerancia de  $10^{-6}$

### 3.2. Discusión de los resultados

Para estudiar los fenómenos mecánicos es preciso escoger un sistema de referencia. En los distintos sistemas de referencia las leyes del movimiento no tienen en general la misma forma. Al escoger un sistema de referencia arbitrario, puede ocurrir que las leyes que rigen fenómenos aún muy sencillos tomen una forma muy complicada [10]. Naturalmente, debe escogerse un sistema de referencia en el cual las leyes de la Mecánica tomen su forma más sencilla. Para

[11] el análisis vectorial moderno es fundamental para la solución de estos problemas, porque está permite encontrar una interpretación geométrica con diversas aplicaciones en la física; el análisis vectorial es por excelencia la herramienta y el lenguaje principal para elaborar modelos matemáticos de los fenómenos físicos.

La ecuación diferencial del péndulo compuesto se dedujo a partir del principio de conservación de la energía, para [12] la energía cinética del sistema es máxima en el punto del estado de equilibrio o en el estado máximo estático, mientras que la energía potencial del sistema es máxima en el estado de mayor amplitud. Mientras que para [13] el término de energía, al igual que el de trabajo en el péndulo, tienen en la física un significado muy preciso. Aunque el concepto de energía es previo, históricamente, al de trabajo, sin embargo, se define la energía de un sistema material como la medida de su capacidad para realizar un trabajo, ya sea en razón al movimiento (energía cinética) o de su posición (energía potencial), la energía es una magnitud física escalar y se mide en las mismas unidades de trabajo. Una descripción cualitativa del movimiento de un péndulo compuesto nos la da [14] y [15], la cual dice que cuando la masa de un péndulo desciende hacia su punto de equilibrio, la energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética y la velocidad aumenta, y la velocidad disminuye cuando la masa asciende hasta alcanzar su máxima altura en uno de los extremos, los que implica que la energía cinética pasa entonces a energía potencial.

La solución numérica se realizó con los métodos de Runge-Kutta (RK), ya que estos permiten alcanzar la exactitud del procedimiento de la serie de Taylor sin necesidad de realizar cálculos de derivadas de orden superior. Existen muchas variantes de (RK), pero todas tienen la forma generalizada de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (18)$$

Utilizando los métodos numéricos para resolver la ecuación del péndulo compuesto, se encontró una solución muy aproximada a la solución exactas. Es importante recordar que estos métodos numéricos se basan en: Nuevo valor = valor anterior + pendiente  $\times$  tamaño de paso, que en términos matemáticos es:  $Y_{i+1} = Y_i + f(x_i, y_i) h$  Ecuación 19. De acuerdo con esta ecuación, la pendiente estimada  $f(x_i, y_i)$  se usa para extrapolar desde un valor anterior  $Y_i$  a un nuevo valor  $Y_{i+1}$  en una distancia  $h$ . Esta fórmula se aplica paso a paso para calcular un valor posterior y, por lo tanto, para trazar la trayectoria de la solución.

Todos los métodos de un paso que se expresen de esta forma general, tan sólo van a diferir en la manera en la que se estima la pendiente. Como en el problema del péndulo

compuesto, el procedimiento más simple consiste en usar la ecuación diferencial, para estimar la pendiente, en la forma de la primera derivada en  $x_i$ . En otras palabras, se toma la pendiente al inicio del intervalo como una aproximación de la pendiente promedio sobre todo el intervalo. Tal procedimiento, llamado método de Euler. Después se revisan otros métodos de un paso que emplean otras formas de estimar la pendiente que dan como resultado predicciones más exactas. Todas estas técnicas en general se conocen como métodos de Runge-Kutta. Al analizar las variantes de los métodos de Runge-Kutta, todas tienen la forma generalizada de la ecuación.

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h) h \quad (20)$$

donde  $\phi(x_i, y_i, h)$  se conoce como función incremento, la cual puede interpretarse como una pendiente representativa en el intervalo. La función incremento se escribe en forma general como:  $\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$  (21)

donde las  $a$  son constantes y las  $k$  son:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h), \\ k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h), \dots, \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned} \quad (22)$$

donde las  $p$  y las  $q$  son constantes. Observe que las  $k$  son relaciones de recurrencia. Es decir,  $k_1$  aparece en la ecuación  $k_2$ , la cual aparece en la ecuación  $k_3$ , etcétera. Como cada  $k$  es una evaluación funcional, esta recurrencia vuelve eficientes a los métodos RK para cálculos en computadora. Es posible tener varios tipos de métodos de Runge-Kutta empleando diferentes números de términos en la función incremento especificada por  $n$ . Observe que el método de Runge-Kutta (RK) de primer orden con  $n = 1$  es, de hecho, el método de Euler. Una vez que se elige  $n$ , se evalúan las  $a, p$  y  $q$  igualando la ecuación  $Y_{i+1} = Y_i + \phi(x_i, y_i, h) h$  a los términos en la expansión de la serie de Taylor. Así, al menos para las versiones de orden inferior, el número de términos,  $n$ , por lo común representa el orden de la aproximación. En cuanto al cálculo de la raíz se puede observar que el método de Newton fue más rápido que el método de bisección, lo cual se puede evidenciar con el número de iteraciones realizadas por cada uno de ellos. Aunque ambos métodos llegaron al mismo valor de la raíz que fue de 0.1856 con una tolerancia de  $10^{-6}$ .

#### 4. CONCLUSIONES

Los métodos de Runge-Kutta tienen el error local de truncamiento de orden alto, como los métodos de Taylor, pero permiten predecir el cálculo y evaluación de las derivadas de  $f(t, y)$ . El método de Runge-Kutta de cuarto orden empleado en este proyecto requiere realizar cuatro evaluaciones por paso, da respuestas más exactas que los métodos de Euler y

de Heums. De manera análoga, si queremos que el método de Runge-Kutta de orden cuatro sea mejor, deberá ofrecer una mayor precisión con el tamaño de paso  $h$ . Este método tiene un error local de truncamiento de  $O(h^4)$  siempre que la solución tenga cinco derivadas continuas.

El método de bisección, aunque es claro desde el punto de vista conceptual, ofrece inconvenientes importantes, como el de converger lentamente (es decir,  $N$  puede volverse muy grande antes que  $|p - p_N|$  sea bastante pequeño) e inadvertidamente podemos desechar una buena aproximación intermedia. Sin embargo, tiene la importante propiedad de que siempre converge en una solución y, por tal razón, a menudo sirve para iniciar los métodos más eficientes en su rapidez de convergencia como lo es el método de Newton. El método de Newton Raphson es una técnica muy poderosa, pero presenta un grave problema: la necesidad de conocer el valor de la derivada de  $f$  en cada aproximación. Con frecuencia es más difícil determinar la derivada de la función,  $f'(x)$  y se requiere más operaciones aritméticas para calcularlo que para  $f$ .

## REFERENCIAS

- A. P Gano, *Tratado elemental de física experimental aplicada y de meteorología*. España: Maxtor, 2012, pp. 46 y 55.
- M. Ortiz, *Sistemas dinámicos en tiempos continuo: modelación y simulación*. México: Universidad Politécnica de Victoria, 2015, pp. 27, 58.
- R. Burden, F. Douglas, *Análisis Numérico*. Estados Unidos: Math Learning, 2016, pp. 272 – 280.
- S. Chapra, R. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGraw Hill, 2015, pp. 124-154.
- N. Cubillan, J. Deluque, A. Arcon, "Ecuaciones generalizadas de diferencias finitas basadas en series de Taylor para el cálculo de propiedades ópticas no lineales". *Revista Prospectiva*, 16 (2), 13-23, 2018.
- Matlab. Lenguaje para computadores. Disponible desde <<https://la.mathworks.com/>> [Acceso 4 de julio 2019].
- A. Franco, Curso Interactivo de Física en Internet. Disponible desde: <[http://www.sc.edu.es/sbweb/fisica\\_/](http://www.sc.edu.es/sbweb/fisica_/)> [Acceso 6 de julio 2019].
- R. Feynman, *Lectures on physics volume 1*. Estados Unidos: Pearson P T R, 2017, pp. 30-35.
- J. Marion, *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Barcelona: Reverté, 1996, pp 181-184.
- L. Landau, E. Lifshitz, *Mecánica volumen 1*. Barcelona: Reverté, 2005, pp. 5-12.
- R. Hernández, *Dinámica*. México: Patria, 2014, pp. 80-146.
- J. Calaf, *Oscilaciones teoría y problemas*. Baeclona: UPC, 2012, pp. 22-30.
- M. Ortega, *Lecciones de física volumen 1*. Monytex, 2016, pp. 252-253.
- P. Tipler, G. Mosca, *Física para la ciencia y la tecnología volumen 1*. Barcelona: Reverté, 2005, pp. 173, 363-367.
- J. Walker, R. Resnick, D. Halliday, *Fundamentos de física*. Estados Unidos: Wiley, 2014, pp. 354-360.