

# **Metodología basada en el método heurístico de polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos**

## **Based methodology in Polya's Heuristic method for the learning of solving mathematical problems**

*Magister en Educación, Especialización en Pedagogía de las Ciencias Universidad Simón Bolívar  
Docente de Institución Educativa Máximo Mercado en Sabanalarga Monicaboscan315@hotmail.com*

**Mónica Mercedes Boscán Miele**

*Magister en Educación, Especialización en Pedagogía de las Ciencias Universidad Simón Bolívar  
Docente Nuestra Señora de la Candelaria, Atlántico, kaliklema\_23@hotmail.com*

**Karen Lisett Klever Montero**

Recibido: Oct 31 de 2012

Aceptado: Nov 22 de 2012

### **RESUMEN**

Este artículo de investigación, abarcó el análisis de la implementación de una metodología, basada en el método heurístico de Polya, con el cual se buscó favorecer el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos de los estudiantes atlanticenses de séptimo grado de Educación Básica, con un estudio de caso de la Institución Educativa Máximo Mercado (IEMM) de Sabanalarga. Se indagaron categorías de análisis como: comprensión, concepción, ejecución de un plan, visión y retrospectiva, de la teoría del método heurístico Polya. Mediante un pre experimento, se diagnosticó y analizó el modo de proceder y los resultados obtenidos antes y después de la implementación de una propuesta metodológica basada en Polya. Esta, previamente, se sometió a criterio de quince expertos, arrojando un coeficiente de competencia alto. La prueba que se aplicó a los estudiantes, constaba de cinco problemas y una encuesta complementaria para determinar cuáles de los pasos propuestos con la metodología Polya seguían los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. El paradigma empírico analítico, con un diseño de Pre experimento trabajó una muestra de 35 estudiantes de la Institución. La Sesión novena del Pos-test del método heurístico, dio como resultado: los estudiantes analizaron y compararon todo el procedimiento desarrollado por ellos, se percataron de los errores que cometieron en la realización de una operación y planificaron hasta la sesión de revisión de sus resultados, con un aumento del 48,57% en el número de estudiantes que identificó en cada problema las operaciones o procedimientos que debía realizar para obtener la respuesta.

**Palabras clave:** método heurístico de Polya, problema, resolución de problemas matemáticos.

### **ABSTRACT**

This article of research, is an analysis of the implementation of a methodology, based on the heuristic method of Pólya, has favored the students Atlanticenses seventh-grade of basic education, with a case study of the institution educational maximum market of Sabanalarga, on the learning of mathematical problem solving. Asked about the categories of analysis: understanding, conception and execution of a plan and vision retrospective, the heuristic method of Polya theory. Through a pre experiment, he diagnosed and analyzed how to proceed and the results obtained before and after the implementation of a proposal methodological based on this Pólya, previously, underwent criterion of 10 experts, determining its competition, and were sent to the experts, a test that was applied to the students of five problems of multiple-choice single answer and a survey to determine which of the steps proposed by Pplya were still students in solving mathematical problems. The empirical analytical paradigm, with Pre design experiment with a sample of 35 students of the institution Two sessions, including the Pos-test or 9th session, were devoted to the final stage of the heuristic method; It is vision retrospective, and obtained that the students analysed and compared the procedure developed by them and noticed the errors committed in any step or the completion of a transaction.

**Key words:** heuristics method of Polya, problem, solving mathematical problems

## Introducción

Uno de los cinco procesos generales, asumidos en la enseñanza de toda actividad matemática, que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas es formular y resolver problemas (MEN, 1998). También, según documentos posteriores:

*La formulación, tratamiento y resolución de problemas es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problemas proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido. Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006),*

Sin embargo, pese a la importancia que se le ha concedido, la resolución de problemas matemáticos es un proceso en el cual los estudiantes colombianos siguen presentando dificultades, situación que genera preocupación y que se ha constituido en tema de investigación y reflexión para los docentes del país.

Los bajos resultados de los estudiantes colombianos en la resolución de problemas matemáticos se ven evidenciados al analizar lo que sucede en las pruebas internacionales tales como PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) y TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias). Colombia ha participado en TIMSS en los años 1995 y 2007. En el año 1995, ocupó el penúltimo lugar entre cuarenta y dos países y en su segunda participación, en el 2007, la mayoría de los estudiantes colombianos de los grados octavos, que fueron evaluados, volvió a ubicarse en los más bajos niveles de desempeño, lo que indica que les falta la capacidad de organizar y plantear conclusiones a partir de información, realizar generalizaciones y resolver problemas no rutinarios, que serían los resultados propios a un nivel de desempeño avanzado (ICFES, 2009a).

Con respecto a la prueba PISA, Colombia participó por primera vez en el 2006, registrando en matemática el menor desempeño de las tres áreas evaluadas (lectura, matemáticas y ciencias), ubicándose el 72% de los estudiantes colombianos evaluados en los niveles inferiores, en los cuales responden a preguntas relacionadas con contextos que le son conocidos e identifican información y llevan a cabo procedimientos rutinarios, pero no seleccionan ni aplican estrategias de solución de problemas sencillos. En el 2009 Colombia participó por segunda vez en PISA, y aunque se logró un aumento de 11 puntos en el promedio de matemática, éste sigue estando por debajo de la media de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), ubicándose el 38,8% de los estudiantes colombianos por debajo del nivel inferior (ICFES, 2010a).

A nivel nacional, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) realiza desde el año 2002 las evaluaciones trienales llamadas SABER, las cuales evalúan tres campos del conocimiento: español, matemáticas y ciencias. El propósito de la

prueba de matemáticas es evaluar el saber hacer de los estudiantes en el contexto matemático escolar a través de competencias matemáticas, entre las cuales está el planteamiento y resolución de problemas. MEN en el año 2006 (ICFES, 2012). Las Pruebas SABER, en el año 2009, muestran, en el caso del grado noveno, que solo el 52% de los alumnos evaluados, logró posicionarse en el nivel mínimo de desempeño (nivel C), y sólo el 3% demostró un desempeño sobresaliente en el área (nivel F). Resultados ambos por debajo de lo que esperaba el ICFES: Se estimaba que el 35% de los estudiantes alcanzara este nivel (ICFES, 2010b), y que el 95% de los estudiantes alcance el nivel mínimo de desempeño (nivel C), en el que se ubican quienes logran resolver problemas de rutina, pueden modelar situaciones aritméticas y justificar estrategias y procedimientos usando ejemplos, pero que los resultados estuvieron muy por debajo de los esperado.

Igual panorama se vislumbra al analizar los resultados de los estudiantes de las cuatro promociones de la IEMM en las Pruebas de Estado para Ingreso a la Educación Superior aplicadas por el ICFES y los obtenidos en Pruebas Saber por los estudiantes de los grados noveno y quinto en el año 2009. Los promedios de los estudiantes de la IEMM en las Pruebas de Estado para Ingreso a la Educación Superior en el área de matemática en los años 2008, 2009, 2010 y 2011 se ubicaron por debajo del promedio nacional en cada uno de estos años. En la Prueba Saber del 2009, el 52% de los estudiantes de noveno grado se ubicó en el nivel insuficiente y el 48% restante en el nivel mínimo. En quinto grado un 63% de los estudiantes evaluados se ubicó en el nivel insuficiente, 33% en el nivel mínimo, y sólo 2% en el nivel satisfactorio y otro 2% en el avanzado (ICFES, 2010c).

La falta de éxito de los estudiantes en el área de matemáticas, y por ende en la resolución de problemas, que es el proceso que se considera el eje articulador del currículo de dicha área (MEN, 2006), también se evidenció en el grupo de séptimo de la Institución Educativa Máximo Mercado (IEMM) al analizar las calificaciones obtenidas por ellos en el área de matemáticas el año inmediatamente anterior. En dicho análisis se observa que el 2,63% obtuvo un nivel de desempeño superior, 2,63% desempeño alto y el 13,16% desempeño bajo, ubicándose la mayoría de los estudiantes, 81,58%, en el nivel de desempeño básico cuando lo esperado es que un gran porcentaje de ellos se ubique en los niveles alto y superior.

Teniendo en cuenta la importancia de esta problemática descrita, surgió el interés de presentar un análisis sobre la implementación de una propuesta metodológica basada en el método heurístico de Polya, producto de la investigación, que trabajó dicha propuesta como respuesta a ¿Cómo favorecer el aprendizaje de la resolución de problemas en alumnos de séptimo grado de Educación Básica en Sabanalarga, Atlántico, con un estudio de caso en la Institución Educativa Máximo Mercado?

**Importancia y justificación del Tema:** Lo planteado muestra elementos que justificaron la investigación y la importancia del

abordaje de esta temática, para la educación, debido a que la enseñanza de las matemáticas y en especial de la resolución de problemas en dicha área, puede contribuir a la consecución de los fines de la educación que establecen:

*El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país, como se contempla en el numeral 9 del artículo 5º: Ley General de Educación (MEN, 1994)*

También, esta temática es importante para la institución educativa donde se realizó, porque a partir de lo investigado, se implementó una propuesta con el fin de generar cambios metodológicos en la enseñanza de las matemáticas, y en particular, de la resolución de problemas en dicha área. Para los estudiantes, es vital, en la misma medida en que lo es la resolución de problemas, por tratarse de un proceso que permite el desarrollo de competencias (Cardoso y Cerecedo, 2008). Estas, les serán útiles no sólo en su vida escolar, sino a lo largo de su existencia ya que a diario se están enfrentando a situaciones problema.

### Metodología

La población de interés estuvo constituida por los estudiantes del séptimo grado de Institución Educativa Máximo Mercado, con quienes se realizó un estudio hipotético-deductivo con diseño pre experimental de medición inicial y medición final, (Hernández, Fernández y Baptista, 1997). En este, se sometió a una muestra no probabilística de estos estudiantes, al seguimiento del comportamiento de la variable dependiente: aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, después de recibir una intervención, que se constituyó en la variable independiente: una metodología basada en el método heurístico de Polya.

Se abordó desde el paradigma empírico-analítico, comenzando desde la teoría y los referentes empírico para ir delimitando un

problema alrededor del cual se formuló una hipótesis sujeta a la verificación en el diseño pre experimental (Toro y Marcano, 2005).. Se hizo una medición inicial de la variable dependiente (pre-test), se aplicó el tratamiento o propuesta de la metodología fundamentada en Polya y posteriormente se realizó una nueva medición (pos-test). Finalmente se compararon los resultados obtenidos en las mediciones.

La hipótesis planteaba que la utilización de una metodología basada en el método heurístico de Polya, favorecería el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Máximo Mercado. Se aplicó un instrumento de evaluación basado en las Pruebas Saber y una encuesta complementaria para identificar los resultados obtenidos y el modo de proceder de los estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Máximo Mercado al resolver problemas de matemáticas. Al final se contrastaron los resultados obtenidos y el modo de proceder, al resolver problemas matemáticos, de los estudiantes del séptimo grado de la Institución Educativa Máximo Mercado antes y después de la implementación de la metodología propuesta.

Las variable independiente: metodología basada en el método heurístico de Polya y La variable dependiente: Aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos fueron definidas conceptual y operacionalmente como se muestra en el siguiente cuadro de la Fig. 1

A partir de las variables consideradas se generaron unas categorías de análisis con sus respectivos índices, lo que permitió tabular y medir la información obtenida. Ver Cuadro Categorías de análisis de la Fig. 2.

La población de interés estuvo constituida por 239 estudiantes de bachillerato de la Institución Educativa Máximo Mercado, ubicada en la calle 22 con carrera 9 en el municipio de Sabanalarga, Atlántico. Muestra: Se realizó un muestreo no probabilístico de manera intencional o de conveniencia en el que se seleccionaron

**Fig. 1** Operacionalización de las variables

Variables	Definición conceptual	Definición operacional
Aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos	Proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores relacionados con la toma de decisiones (conscientes e intencionales) en el cual el estudiante elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesita para cumplir una determinada demanda u objetivo (Monereo et al. 1998).	Evaluación del modo de proceder de los estudiantes al resolver problemas de matemáticas (Encuesta) antes y después de la intervención y verificación a través de conocimiento (Prueba Saber) de los logros obtenidos
Una metodología basada en el método heurístico de Polya.	Metodología mediante la cual se les plantean a los alumnos impulsos que les facilitan la búsqueda independiente de soluciones a los problemas propuestos (Balderas, 1999).	Actividades realizadas en cada una de las etapas o fases de la metodología, enfocadas en: Comprensión del enunciado, concepción y ejecución de un plan y visión retrospectiva. .

**Fuente:** Los autoras Mónica Mercedes Boscán Mieles y Karen Lisett Klever Montero

Fig. 2 Categorías de análisis

Indicadores	Items
Comprensión del enunciado	¿Interpreta correctamente el enunciado de los problemas? ¿Puede plantear el problema en sus propias palabras?
Concepción de un plan	¿Propone estrategias de solución? ¿Identifica submetas?
Ejecución del plan	¿Acompaña cada operación matemática de una explicación contando lo que hace y para qué lo hace? ¿Ante alguna dificultad vuelve al principio, reordena ideas y prueba de nuevo?
Visión retrospectiva	¿Los resultados están acorde con lo que se pedía? ¿La solución es lógicamente posible? ¿Se puede comprobar la solución? ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?

**Fuente:** Las autoras

aque aquellos sujetos más fácilmente accesibles (Robledo, 2005), los cuales fueron los estudiantes del curso de séptimo grado de la IEMM, curso que está conformado por un total de 35 estudiantes; 18 niños y 17 niñas con edades entre 12 y 16 años, de estrato socioeconómico uno.

Para la recolección de la información se analizó el estado inicial de los estudiantes en cuanto a la manera de resolver problemas matemáticos antes de iniciar la intervención (pre-test), y, al finalizar la intervención, mediante una nueva medición (post-test); el instrumento estaba constituido, por cinco problemas de selección múltiple con única respuesta, organizados de menor a mayor grado de complejidad, basados en los problemas matemáticos de los niveles C y D para el grado quinto que plantea las Pruebas Saber.

La prueba, se encuentran en el documento denominado: ¿Cómo interpretar la evaluación Prueba Saber? (MEN, 2005), las características de estos problemas, se relacionan con los niveles C y D de la misma.

Se diseñó una encuesta compuesta, por un total de 13 preguntas, con respuesta cerradas dicotómica, encaminada a conocer cuál o cuáles de los pasos propuestos por Polya ponían en práctica los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas, durante la mencionada prueba. Esta primera encuesta, que se envió a quince expertos, estuvo encaminada a determinar cuáles de los pasos propuestos en el método de Polya ponían en práctica los estudiantes a la hora de enfrentarse a un problema matemático y arrojó el coeficiente de fiabilidad de alfa de Cronbach de 0,797; indicando que era altamente fiable. Los resultados de la encuesta se analizaron mediante el programa estadístico SPSS. Esta encuesta se utilizó antes de la intervención, medición inicial (pre test) y después de la intervención, medición final (pos test)

El grupo de expertos realizó también la validación de la propuesta “una metodología basada en el método heurístico de Polya para la resolución de problemas matemáticos”, y se les envió por correo

electrónico. Todos coincidieron, en que los indicadores: claridad en la redacción de la metodología, correspondencia entre la metodología propuesta y el método Polya y las actividades propuestas, están adecuadas para los destinatarios, estudiantes de séptimo grado, y según los puntos de corte son muy relevantes. Además los indicadores: nivel de complejidad, orden lógico de presentación, cantidad de actividades de cada etapa y las actividades de las etapas están acordes a ésta; los puntos de corte con las opiniones de los expertos establecieron. Por lo anterior, se pudo establecer que la metodología propuesta cumple con los requerimientos y es validada para ser implementada.

### Referentes teóricos

**La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva constructivista** El constructivismo intenta explicar cómo el ser humano es capaz de construir conocimiento desde los recursos de la experiencia y la información que recibe (Chadwick, 2001) y el constructivismo acerca de un modelo que sostiene:

*El individuo no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano. Camejo (2006, p. 3),*

Las distintas corrientes existentes dentro de este paradigma, coinciden en el postulado central que destaca la importancia de los conocimientos previos, como base para el nuevo conocimiento y, por tanto, para el aprendizaje. En esa misma línea, Driver afirma que “lo que hay en el cerebro del que va a aprender tiene importancia” (Driver, 1986), con lo que sugiere que los sujetos construyen representaciones del saber y las utilizan para interpretar las experiencias nuevas..

Estos postulados constructivistas son aplicables a cualquier área del saber y la matemática es una de ellas. En tal sentido,

Kilpatrick, Gómez y Rico (citados en Larios, 2000, p. 3) precisan que las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación en las estructuras existentes.

En el caso de las matemáticas una experiencia que favorece la construcción de conocimientos a partir de procesos de abstracción reflexiva es la resolución de problemas. A tal efecto, Larios (2000) afirma que:

*Tal parece que para que el estudiante pueda construir su conocimiento y llevar a cabo la obligatoria interacción activa con los objetos matemáticos, incluyendo la reflexión que le permite abstraer estos objetos, es necesario que estos objetos se presenten inmersos en un problema y no en un ejercicio. De hecho son estas situaciones problemáticas las que introducen un desequilibrio en las estructuras mentales del estudiante, que en su afán de equilibrarlas (un acomodamiento) se produce la construcción del conocimiento. (p. 5).*

Todo las anteriores posturas teóricas, indican que la resolución de problemas es una experiencia didáctica que favorece la construcción de conocimiento, pero ¿qué es un problema?, ¿qué es resolver un problema? Es conveniente hacer claridad al respecto ya que “la utilización de los términos “problema” y “resolución de problemas” ha tenido múltiples y a veces contradictorios significados a través de los años” (Vilanova, et. al, 2001)

**-Conceptualización de qué es un problema** Con respecto al término “problema”, a través del tiempo se ha propuesto una serie de conceptualizaciones Las autoras del presente trabajo coinciden con la dada por Parra (1990, p. 14) en la que establece que

*Un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera inmediata*

Para Schoenfeld (1985) la dificultad de definir el término “problema” radica en que es relativo: un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea. En este sentido, Charnay (1994) dice que un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno; es decir, el problema se da solo si el alumno percibe una dificultad.

Ciertamente, lo que es un problema para un individuo puede no serlo para otro, sea porque está totalmente fuera de su alcance o porque para el nivel de conocimientos del individuo, el problema ha dejado de serlo Parra (1990, p.14). En 1962, en su libro *Mathematical Discovery*, Polya define un problema como aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.

En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o ignorar, y una vez localizado, se aplica y basta. Lo anterior, no se constituye un problema propiamente dicho y es por ello, que para Larios (2000), un problema es una situación (real o hipotética) que resulta plausible al alumno desde su punto de vista experiencial y que involucra conceptos, objetos u operaciones matemáticas, mientras que un ejercicio se refiere a operaciones con símbolos matemáticos únicamente (sumas, multiplicaciones, resolución de ecuaciones, etcétera). En síntesis, un ejercicio se resuelve a través de procedimientos rutinarios que conducen a la respuesta, el problema exige el desarrollo de una estrategia para resolver la incógnita.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios. Por tanto, un “problema” es una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos y buscar relaciones nuevas entre ellos.

Las autoras de la investigación coinciden con Polya (1980): “resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados”, y Parra (1990, p. 15): “La resolución de problemas se refiere a la coordinación de experiencias previas, conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce”.

En apoyo a estas ideas, De Guzmán (2007) sostiene que la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas tiene la intención de transmitir, de una manera sistemática, los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. Tal experiencia debe permitir al estudiante activar su capacidad mental, ejercitar su creatividad y reflexionar sobre su propio aprendizaje (metacognición) al tiempo que se prepara para otros problemas, con lo que adquiere confianza en sí mismo.

Polya, a través del libro “Cómo plantear y resolver problemas”, introduce el término “heurística” para describir el arte de la resolución de problemas. La heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso (Polya, 1965, p. 102). Agrega que la heurística tiende a la generalidad, al estudio de los métodos, independientemente de la cuestión tratada y se aplica a problemas de todo tipo.

Según Polya (1965, p. 19), para resolver un problema se necesita: Comprender el problema: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos y las condiciones? Concebir un plan: ¿conoce un problema relacionado con éste?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿ha empleado todos los datos? Ejecución del plan: comprobar cada uno de los pasos, ¿puede usted ver que el paso es correcto? Visión retrospectiva: verificar el resultado.

Por otra parte Schoenfeld (citado en Barrantes 2006 y Vilanova et al, 2001), además de las heurísticas, propone tomar en cuenta otros factores tales como: Recursos: son los conocimientos previos que posee la persona, se refiere, entre otros, a conceptos, fórmulas, algoritmos, y en general todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentar un problema. Control: que el alumno controle su proceso entendiendo de qué trata el problema, considere varias formas de solución, seleccione una específica, monitoree su proceso para verificar su utilidad y revise que sea la estrategia adecuada. E introduce el Sistema de creencias, por considerar que van a afectar la forma en la que el alumno se enfrenta a un problema matemático.

Por su parte, tanto Polya como Parra conciben cuatro etapas en el proceso de resolución de problemas. Para George Polya (1965), la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases bien definidas:

La primera fase consiste en la comprensión del problema, es la fase del cuestionamiento y de la identificación de datos e incógnitas. Entender el problema, según Polya, es apropiárselo; concretarlo en tan pocas palabras que pueda ser reformulado de manera distinta sin modificar la idea. Por supuesto, para lograrlo es necesario aprehender su enunciado verbal.

La segunda fase consiste en la concepción de un plan, en esta fase el docente debe guiar al estudiante para la concepción de un plan pero sin imponérselo. Al ya tener concebido un plan se prosigue con la ejecución del mismo, ésta es la tercera fase propuesta por Polya, que corresponde a la elaboración del proceso creativo; es importante que se vaya verificando cada paso que se ejecute del plan, examinar a cabalidad que cada pieza encaje perfectamente; la veracidad de todo razonamiento; la claridad de toda operación.

Por último, la cuarta fase, es una visión retrospectiva en donde se tiene que reconsiderar la solución así como el procedimiento que llevó a ésta; esta fase ayuda a que el estudiante consolide sus conocimientos y desarrolle sus aptitudes para resolver problemas. Es importante que el docente vaya guiando al estudiante a lo largo de este proceso para que después éste lo pueda reproducir sin su compañía.

Además, Parra (1990, p. 15) considera que al resolver un problema, el sujeto, sigue lo siguiente: formula el problema en sus términos propios; experimenta, observa, tantea; conjetura y valida.

**Tipos de conocimiento involucrados en la resolución de problemas** Diversos investigadores han estudiado los tipos de conocimiento involucrados en la resolución de problemas, encontrándose que los resultados apoyan la noción de que la eficiencia en la resolución de problemas está relacionada con el conocimiento específico del área en cuestión (Mayer, 1992; Sternberg, 1987). En este sentido, estos autores coinciden en señalar que entre los tipos de conocimiento necesarios para

resolver problemas se incluyen el conocimiento declarativo, el conocimiento procedimental y el conocimiento condicional.

Aunque no es finalidad de este artículo hacer una revisión amplia de lo que son el conocimiento declarativo y el procedimental, conviene especificar brevemente que Monereo, Castelló, Clariana, Palma y Pérez (1998, p. 25), refieren que el conocimiento es declarativo “por cuanto puede comunicarse o declararse a través del lenguaje verbal”.

Siguiendo a Monereo et al. (1998, p. 20), un procedimiento es algorítmico cuando la sucesión de acciones que hay que realizar se halla completamente prefijada y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema o de la tarea (por ejemplo, calcular una raíz).

Los procedimientos algorítmicos y los procedimientos heurísticos pueden ser considerados como extremos de un continuo en el que es posible situar diferentes tipos de procedimientos según su proximidad o lejanía respecto a cada uno de ellos. No obstante, el no disponerse de un sistema de respuestas totalmente constituido se requiere del análisis de la información presentada y de un uso creativo y pertinente del conocimiento declarativo y procedimental. Y va más allá, es un proceso que permite al estudiante la generación de un tercer tipo de conocimiento, denominado condicional. El nombre de condicional intenta reflejar la actuación mental que subyace en la toma de decisiones sobre las acciones a realizar: “en estas condiciones, lo mejor es pensar o actuar así para lograr ese objetivo” (Monereo, et al., 1998, p. 27).

En otras palabras, el estudiante que llega a generar el conocimiento condicional que se requiere para poder enfrentar con éxito la resolución de problemas, en este caso de problemas matemáticos, ha desarrollado estrategias de aprendizaje que, en términos de Monereo et al. (1998, p. 27), son definidas como “procesos de toma de decisiones (conscientes e intencionales) en los cuales el alumno elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesita para cumplir una determinada demanda u objetivo, dependiendo de las características de la situación educativa en que se produce la acción”.

En la literatura existente acerca de la resolución de problemas matemáticos, pueden encontrarse múltiples análisis acerca de qué supone la realización de esta tarea en términos de actividad cognitiva y algunas propuestas de sistematización, hasta donde ésta es posible, de la tarea de resolver problemas. Entre otras, son ampliamente conocidas las aportaciones de Polya (1957), De la Vega (1984), Gagné (1991), Schoenfeld (en Santos, 1992), Parra (1990), mismas que tienen algunos elementos de coincidencia, aunque diferente designación de las etapas o acciones clave que se dan cuando una persona pretende resolver un problema.

¿Cómo puede orientarse entonces la enseñanza de la resolución de problemas? Según Alonso, González y Sáenz (1988),

la resolución de problemas no puede considerarse como una tendencia totalmente nueva en la enseñanza de la matemática, pues ya desde la antigüedad los científicos se habían dado a la tarea de estudiar las variables relativas al proceso de resolución. Sin embargo, señala este autor que, a pesar de que las variables de proceso fueron consideradas ya desde el primer cuarto del siglo pasado como un campo relevante de la investigación sobre resolución de problemas, hay práctica unanimidad al afirmar que la verdadera investigación sobre las variables de proceso se inicia a partir de los escritos de Polya, sobre todo con la aparición en 1945 de su libro *How to solve it*.

Lo que realmente aporta Polya es un modelo. Señala Alonso et al. (1988, p. 251) que la investigación precedente se focalizaba en ciertos aspectos materiales y concretos del enunciado, o en las habilidades específicas de los buenos o malos resolutores. Sin embargo la complejidad del proceso de solución de problemas requería procedimientos que permitieran el seguimiento y valoración de las distintas fases implicadas y, consecuentemente, de las habilidades o competencias requeridas, y que la heurística multifase de Polya resuelve esta necesidad.

Atendiendo a lo expuesto en los párrafos anteriores, a la pregunta ¿cómo puede orientarse la enseñanza de la resolución de problemas?, Alonso et al. (1988, pp. 251-252) responden: “La heurística multifase de Polya ofrece un modelo formal tanto para quien resuelve problemas como para quien enseña a resolverlos”.

En consecuencia, este estudio retoma el modelo de heurísticas de Polya sobre la resolución de problemas; en tal sentido, recupera las cuatro fases contempladas en el método probado por este autor a saber: comprensión del problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.

Además de lo propuesto por Polya, según Pozo y Postigo (1994), para completar las distintas fases o pasos en la solución de un problema, los alumnos necesitarían adquirir procedimientos de: -Adquisición de la información- Interpretación de la información - Análisis de la información y realización de inferencias- comprensión y organización conceptual de la información y - Comunicación de la información.

Es así, como los pasos y procedimientos descritos en los párrafos anteriores, las acciones y el ambiente que el maestro logre crear dentro de su clase, darán significado a la práctica de resolución de problemas. Según Parra (1990, p. 19) las acciones del maestro deberían encaminarse en primer lugar, a asegurarse de que el problema ha sido comprendido por los alumnos antes de que éstos procedan a la resolución, discutiendo las palabras del texto que eventualmente causen dificultades; luego, durante la resolución, observar el trabajo de los alumnos e interrogarlos para identificar las dificultades que enfrentan, animarlos a desarrollar una o varias estrategias y, si es necesario, hacerles alguna sugerencia.

Estudios como los de Valle, Juárez y Guzmán (2007) utilizaron estrategias para resolución de problemas en la olimpiada mexicana de matemáticas con jóvenes entre 14 y 17 años. También tuvieron ese enfoque de estrategias en la resolución de problemas, Rizo y Campistrous (1999), quienes realizaron un estudio de caso con el objetivo de “aislar” las estrategias que utilizan los alumnos al momento de resolver problemas matemáticos y clasificaron el uso de las mismas en dos maneras: reflexivas e irreflexivas.

**Las mediciones iniciales y sus resultados.** En primera instancia, se identificó cómo se encuentran los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas matemáticos, realizando unas mediciones iniciales, con una serie de problemas para que los estudiantes den solución y analizar las respuestas obtenidas. Con este instrumento, se observa cuál es el procedimiento que los estudiantes realizan al momento de enfrentarse a la resolución de problemas y verificar que tan efectivo es el mismo.

Los resultados obtenidos mostraron, que los estudiantes, en su mayoría, al enfrentarse a la resolución de problemas matemáticos, no siguen los pasos propuestos por Polya. Y al realizar el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, se observó que:

Presentan dificultades en la comprensión de los enunciados de los problemas. En la prueba se limitaban a escoger una opción de respuesta sin realizar un análisis u operación para obtener la misma. Se observó mucha confusión y poca motivación para la realización de la prueba. Los estudiantes tienen la idea de que todos los problemas se solucionan a través de una adición. Efectúan operaciones sin reflexionar si estas conllevan a obtener la respuesta correcta.

Tomando como base estos resultados se pasó a la siguiente etapa de la investigación la cual fue la implementación de una metodología, para la resolución de problemas matemáticos, basada en el método heurístico de Polya, y se inició la intervención del grupo o muestra, para el caso de la institución en estudio.

**Propuesta de una metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.**

La metodología con desarrollos de actividades encaminadas a promover la superación de las dificultades encontradas, estuvo basada en el método heurístico de George Polya, con sus cuatro fases o etapas ya mencionadas: comprensión del problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.

Sin duda la primera etapa del método, “comprender el enunciado”, es la que cobra mayor importancia, porque si no se tiene claridad y no se entiende la situación, muy difícilmente se puede tener éxito en la solución. En esta fase el estudiante debe determinar, del enunciado, los datos que proporciona, lo que preguntan (in-

cógnita), es decir, a lo que se le va a dar respuesta y establecer las relaciones que hay entre los datos y la incógnita.

Para el desarrollo de esta fase se propone que se planteen unas situaciones problemática contextualizadas para que el estudiante se sumerja en las mismas y logren determinar los datos que suministran y las incógnitas, y establezcan las relaciones existente entre éstos dos, para ello se sugiere que se le vaya direccionando el trabajo a los estudiantes con preguntas como: ¿qué preguntan o qué se pide?, ¿cuál de la información que suministra el enunciado permite dar respuesta a lo que preguntan?, ¿de qué trata el problema?, ¿entiende todo lo que dice?, ¿puede replantear el problema en sus propias palabras?, ¿hay suficiente información?, ¿hay información extraña? Cabe aclarar que esta etapa no se debe dar respuesta a la pregunta.

Cuando los estudiantes muestren dominio de la primera etapa “comprender el enunciado”, se procede a continuar con la segunda etapa del método propuesto por Polya, que es “concebir un plan de solución”. Esta etapa busca que los estudiantes determinen que pasos van a seguir para llegar a la respuesta de la pregunta que plantea el problema y este trabajo se va guiando a través de preguntas como: ¿ha realizado un problema similar?, ¿qué pasos siguió para resolverlo?, ¿qué idea tiene para resolver este problema?, ¿Identifica submetas? Y luego se les pide que identifiquen las operaciones necesarias para resolver los problemas (visualizar una idea de solución sin resolver aun los problemas). Se propone que esta etapa se trabaje con los problemas que ellos estaban trabajando en la primera etapa, ya que son de su conocimiento.

En el momento que los estudiantes determinen el plan de solución para dar respuesta al problema planteado, se continúa con la metodología basada en el método heurístico de Polya, la cual en su tercera etapa busca la ejecución del plan concebido. Es aquí donde los estudiantes aplican las operaciones pertinentes estipuladas en el plan y el docente es un guía que está pendiente y direcciona el trabajo con interrogantes como: ¿puede ver claramente que el paso realizado es correcto?, ¿Acompañó cada operación matemática de una explicación contando lo que hizo y para qué lo hizo?, ¿Ante alguna dificultad volvió al principio, reordenó ideas y probó de nuevo? Se aconseja que se continúe trabajando con los problemas, con los que iniciaron este proceso.

Una vez, resueltos los problemas propuestos, se les hace énfasis a los estudiantes, de que el problema no se termina cuando se llega a una respuesta; es aquí donde se trabaja la cuarta y última etapa de la metodología “visión retrospectiva”. Los estudiantes realizan un análisis y reflexión de todo el proceso resolutivo, y para ello, el docente guía esta etapa formulando preguntas como: ¿los resultados están acorde con lo que se pedía?, ¿la solución es lógicamente posible?, ¿se puede comprobar la solución?, ¿hay algún otro modo de resolver el problema? Se debe escuchar los argumentos que los estudiantes realizan en esta etapa, para verificar el modo de proceder de los mismos en el proceso de

resolución de problemas aplicando esta metodología basada en el método heurístico de Polya.

Cuando se finalizó la aplicación de la propuesta y a manera de establecer qué efecto tiene la aplicación de la metodología basada en el método heurístico de Polya en los estudiantes, se procedió a administrarles unos problemas, para que los resolvieran integrando cada uno de las etapas del método y de esta manera verificar la efectividad del mismo.

Posteriormente, con un plan elaborado, los estudiantes procedieron a la ejecución del mismo, examinando cada paso realizado, para hallar la solución del problema.

Se realizaron las actividades en nueve sesiones. Se finalizó la última sesión con una puesta en común de los procedimientos y las respuestas dadas por los estudiantes en cada uno de los problemas resueltos. Se logró en las dos últimas sesiones (octava y novena) que los estudiantes analizaran y compararan todo el procedimiento desarrollado por ellos y se pudieran dar cuenta de los errores que cometieron en algún paso o en la realización de una operación.

Se enfatizó que todos los problemas no son iguales y por lo tanto no se resuelven de la misma manera, hay que realizar una buena comprensión del enunciado y determinar la información que nos proporciona el mismo y lo que se está preguntando para poder resolverlo.

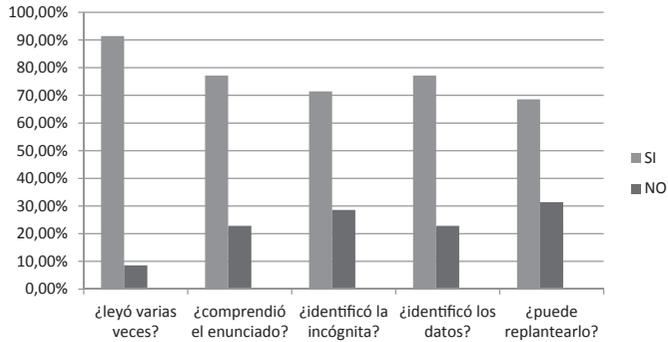
**Evaluación de la metodología implementada** Tal como se expuso en el apartado anterior, el método que se implementó, consistió básicamente en plantearles problemas a los estudiantes y ayudarles a encontrar la solución correcta mediante el uso reiterado de la pregunta, siguiendo en este proceso, cada uno de los pasos propuestos por Polya: comprensión del enunciado, concepción y ejecución de un plan y visión retrospectiva.

Después de haber trabajado durante 8 sesiones, se aplicó el pos-test, en el cual, al igual que en el pre-test, se utilizaron dos instrumentos: una prueba tipo Prueba Saber para analizar el estado de los estudiantes en cuanto a sus resultados al resolver problemas matemáticos y una encuesta encaminada a conocer cuál o cuáles de los pasos propuestos por Polya ponían en práctica al enfrentarse a la resolución de problemas. Se presentan a continuación, en primer lugar, los resultados de la encuesta.

**Comprensión del enunciado** Valorar la comprensión de los problema implicó explorar si los alumnos lograron entender -ver claramente- lo que el problema planteaba (Polya, 1965, p. 28). La comprensión supone entender la pregunta, discriminar los datos y las relaciones entre éstos y entender las condiciones en las que se presentan. En el pos-test (Gráfico 1) el 91,43% de los estudiantes leyeron los problemas varias veces, y más de la mitad de los estudiantes, el 77,14%, afirma haber comprendido

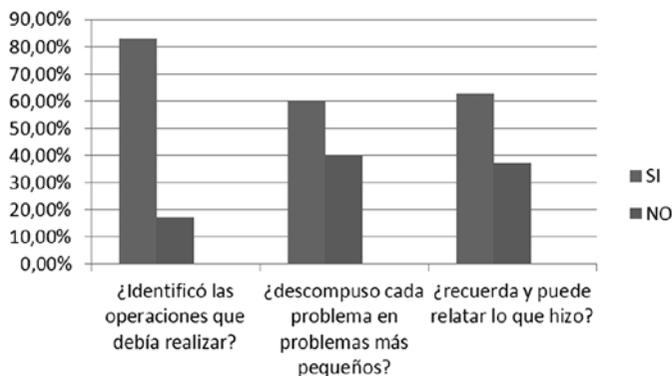
los enunciados de los mismos. En cuanto a la identificación de la incógnita, el 71,43% realizó dicho procedimiento; el 77,14% identificó los datos suministrados por el problema y el 68,57% afirma poder replantear los problemas en sus propias palabras.

**Gráfico 1.** Comprensión del enunciado (mediciones finales, pos test)



**Concebir un plan** El segundo paso es la concepción de un plan y es preciso que los estudiantes perciban las relaciones existentes entre los diferentes elementos con el fin de derivar acciones que conduzcan al resultado correcto (Polya, 1965, p. 28). Se trata de ver lo que liga a los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan para alcanzarla. En fin, como cualquier plan, supone el establecimiento de pasos o tareas para llegar a un objetivo, que es la solución correcta.

**Gráfico 2.** Concebir un plan (mediciones finales, pos test)



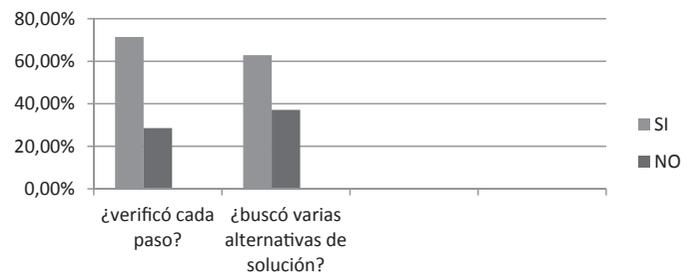
Se exploró su capacidad para establecer un diseño de resolución, cuando se les preguntó si habían identificado las operaciones o procedimientos que debían realizar para obtener la respuesta, si habían descompuesto cada problema en problemas más pequeños cuando era posible y si recordaban expresando lo que habían hecho para resolver cada problema, es decir, si podían describir o recrear el procedimiento utilizado, así como los pasos seguidos para resolver el problema. Además, se encontró que el 82,86% de los estudiantes identificaron las operaciones o procedimientos que debían realizar para obtener la respuesta, se observó que en la mayoría de los casos, las operaciones elegidas eran las indicadas para resolver el problema. En cuanto a descomponer los problemas en otros más pequeños el 60,00% realizó este

procedimiento y el 62,86% manifestó poder recordar y relatar lo que habían realizado. Ver Gráfico 2

**Ejecutar el plan** Al ejecutar el plan se comprueba cada uno de los pasos seguidos (Polya, 1965, p. 33). Si el plan está bien concebido, su realización es factible, y si además se poseen los conocimientos y el entrenamiento necesario, debería ser posible llevarlo a cabo sin contratiempos. Si aparecen dificultades, se tendrá que regresar a la etapa anterior para realizar ajustes al plan o incluso para modificarlo por completo.

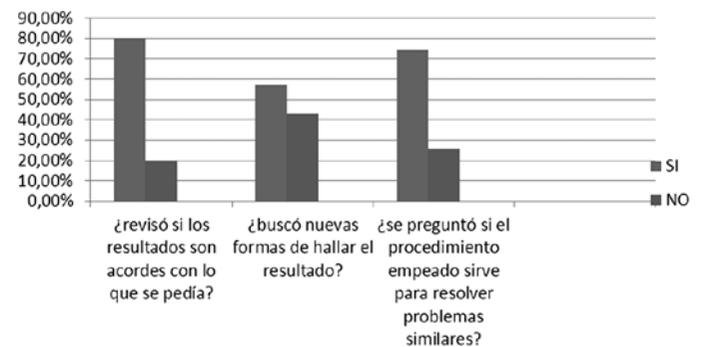
En el pos-test se encontró que el 71,43% de los estudiantes verificó los pasos realizados y el 62,86% buscó varias alternativas de solución (Gráfico 3).

**Gráfico 3.** Ejecución del plan (mediciones finales, pos test)



**Visión retrospectiva** De acuerdo con las respuestas de los estudiantes, en este último paso del proceso resolutorio, en el pos-test se encontró que el 80,00% de los estudiantes revisó si los resultados obtenidos eran acordes con lo que se pedía (Gráfico 4), el 57,14% buscó nuevas formas de hallar el resultado y el 74,29% se preguntó si el procedimiento empleado sirve para resolver problemas similares

**Gráfico 4.** Visión retrospectiva (mediciones finales, pos test)



### Resultados de la prueba tipo Prueba Saber (medición final)

Se presentan a continuación los resultados de la prueba tipo Prueba Saber que se aplicó para analizar el estado de los estudiantes en cuanto a sus resultados frente a la resolución de problemas matemáticos, después de la intervención.

**Tabla 1.** Total respuestas correctas en la prueba de la medición final (post test)

Cantidad de respuestas correctas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0,00	0	0	0
1,00	0	0	0
2,00	4	11,4	11,4
3,00	16	45,7	57,1
4,00	10	28,6	85,7
5,00	5	14,3	100,0
Total	35	100,0	

**Fuente:** Las autoras

**Tabla 2.** Distribución de los estudiantes según la cantidad de respuestas correctas (pos test)

Cantidad de respuestas correctas	Frecuencia	Porcentaje
De 0 a 2	4	11,43
3	16	45,71
4	10	28,57
5	5	14,29

**Fuente:** Las autoras

### Análisis de resultados

Se observó en el pos-test un significativo aumento en el número de estudiantes que tuvieron en cuenta la serie de pasos y preguntas propuestas por Polya cuando se enfrentaron a la solución de los problemas (ver Tabla 35), lo cual influyó positivamente en los resultados de la prueba tipo Prueba Saber (ver Gráfico 13).

El número de estudiantes que comprendieron los enunciados de los problemas aumentó en un 45,71%, lo cual resultó determinante, e indica que comprender exactamente lo que se pregunta, es indispensable para enfrentar con eficacia la resolución de problemas.

Otro aspecto interesante, relacionado con la comprensión de los enunciados de los problemas, fue lo que se observó durante la realización de las pruebas tipo Prueba Saber que se aplicaron. Mientras que en el pre-test la mayoría de los estudiantes intentaron contestar la prueba sin esforzarse demasiado en comprender los problemas, en el pos-test, leyeron más atentamente, lo cual condujo a que logaran comprender y resolver con éxito los problemas.

En cuanto a concebir un plan, hubo un aumento del 48,57% en el número de estudiantes que identificó en cada problema las operaciones o procedimientos que debía realizar para obtener la respuesta. Lo cual era de esperarse, pues hubo una mayor comprensión. Los resultados obtenidos, superaron la creencia de que “los estudiantes corrientes no pueden esperar entender

**Tabla 3.** Comparación de resultados de la encuesta (pre-test/pos-test)

Categorías de análisis	Índice	Resultados pre-test (Porcentaje)		Resultados pos-test (Porcentaje)	
		SI	NO	SI	NO
Comprensión	¿Leyó cada problema varias veces?	62,86	37,14	91,43	8,57
	¿Comprendió el enunciado de cada problema?	31,43	68,57	77,14	22,86
	¿Identificó la incógnita en el enunciado de cada problema?	31,43	68,57	71,43	28,57
	¿Identificó los datos suministrados en el enunciado de cada problema?	22,86	77,14	77,14	22,86
	¿Puede replantear cada problema en sus propias palabras?	17,14	82,86	68,57	31,43
Concebir un plan	¿Identificó en cada problema las operaciones o procedimientos que debía realizar para obtener la respuesta?	34,29	65,71	82,86	17,14
	¿Descompuso cada problema en problemas más pequeños?	25,71	74,29	60,00	40,00
	¿Recuerda, y puede relatar lo primero que hizo para resolver cada problema y lo que hizo después?	31,43	68,57	62,86	37,14
Ejecutar el plan	¿Verificó cada paso que realizó en cada uno de los problemas?	28,57	71,43	71,43	28,57
	¿Buscó varias alternativas para resolver cada problema?	17,14	82,86	62,86	37,14
Visión retrospectiva	¿Revisó en cada problema si los resultados eran acordes con lo que se pedía?	25,71	74,29	80,00	20,00
	¿Buscó nuevas formas de hallar el resultado del problema?	34,29	65,71	57,14	42,86
	¿Se preguntó si el procedimiento empleado en estos problemas sirve para resolver similares?	25,71	74,29	74,29	25,71

**Fuente:** Los autores

matemáticas, simplemente esperan memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente” (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006).

Los resultados obtenidos muestran que este paso es de mucha importancia, en la medida que permite al estudiante trabajar de manera ordenada y reflexiva para lograr un objetivo definido. Se observó en el pre-test que, ante la ausencia de un plan, los estudiantes se limitaban a escoger una opción de respuesta sin realizar un análisis de los procedimientos u operaciones que debían realizar para obtener la misma, o sumando los valores numéricos que encontraban en los enunciados de los problemas. Esto confirma los hallazgos de autores que observan, “una tendencia ejecutora, entre los niños y la creencia de que un problema siempre debe conducir a resolver operaciones”. (Rizo y Campistrous 1999, p. 39)

En cuanto a la ejecución del plan, aunque hubo un aumento de 45,72% en el número de estudiantes que buscó varias alternativas para resolver cada problema, se observó que la estrategia predilecta entre los estudiantes es la de seleccionar la operación pertinente según la incógnita. Ello podría ser el reflejo de la creencia de los alumnos de que existe una única manera correcta de resolver los problemas y, según lo señalado por Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006), usualmente es la regla que el profesor da en la clase.

La última de las categorías de análisis planteadas en este estudio fue la relativa a la visión retrospectiva. Las tres últimas preguntas de la encuesta, en especial la pregunta *¿Revisó si los resultados eran acordes con lo que se pedía?*, aspecto en el cual el número de estudiantes que realizó dicho procedimiento aumentó en un 54,29%, estaban enfocadas a obtener información al respecto. Se considera que este aumento en el porcentaje de estudiantes que revisó sus respuestas y procedimientos también influyó positivamente en los resultados de la prueba.

El resultado estableció que al tenerse en cuenta los pasos y preguntas propuestas por Polya, se favoreció el aprendizaje de la resolución de problemas en los estudiantes de la IEMM, disminuyendo en un 51,43% el número de estudiantes que se ubicó en el nivel insuficiente. Los resultados obtenidos en la prueba tipo Prueba Saber que se aplicó después de la intervención son: el 11,43% respondieron correctamente dos de los cinco problemas propuestos, el 45,71% respondieron correctamente tres de los problemas, el 28,57% respondieron correctamente cuatro de los problemas y el 14,29% respondieron correctamente todos los problemas que se propusieron en la prueba.

Con el software SPSS, se recurrió a la prueba no paramétrica de rangos de Wilcoxon, aplicándola a todas las tablas, indicando que hubo una diferencia significativa entre el antes (pre test) y el después de la intervención (pos test)

## Conclusiones

Existen múltiples análisis acerca de lo que supone la resolución de problemas en términos de actividad cognitiva y algunas propuestas de sistematización, de la tarea de resolver problemas. Entre otras, son ampliamente conocidas las aportaciones de Polya (1957), Schoenfeld (1985) y Parra (1990), las cuales tienen algunos elementos de coincidencia, aunque diferente designación de las etapas o acciones clave que se dan cuando una persona pretende resolver un problema: comprensión, planeación, ejecución y revisión.

Durante la implementación de la metodología basada en el método heurístico de Polya, se observó que una de las mayores dificultades presentadas por los estudiantes consistía en la poca comprensión de los enunciados. Así, al propiciar la metodología, aumentó el número de estudiantes que comprendieron los enunciados de los problemas, y estuvo relacionado con el aumento del número de respuestas correctas..

Se demostró, que después de la intervención, el proceso realizado por los estudiantes, fue reflexivo, ya que concibieron un plan, y al ejecutarlo, no se preocuparon solo en obtener una respuesta sino que se detuvieron a verificar cada paso realizado. Hubo comprensión de la importancia de revisar el resultado obtenido, lo que permitió que tuvieran mayores aciertos al resolver los problemas. Muchos estudiantes al revisar nuevamente el procedimiento que habían realizado, detectaron sus propios errores. Lo cual desde el paradigma constructivista devuelve a las evaluaciones su verdadero sentido dentro un proceso cíclico y no como final de un proceso.

Se confirmó la importancia de tener una metodología, es decir, un modo ordenado y sistemático de proceder al resolver un problema matemático, lo que logró favorecer el aprendizaje de la resolución de problemas en los estudiantes de séptimo grado de la IEMM, aumentando significativamente el número de problemas que resolvieron acertadamente los estudiantes. Indicando que además de las políticas para mejorar los niveles alcanzados por los muchachos en matemática, también es necesario implementar metodologías eficaces de trabajo en el aula, como la presentada, ya que ayuda al pensamiento matemático para enfrentar correctamente la resolución de problemas

## Referencias

- Alvarez, E. (2001). La Educación matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado de: <http://www.rieoej.org/deloslectores/203Vilanova.PDF>.
- Alonso, V., González, A. y Sáenz, O. (1988). E. (2001). Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el ciclo medio de la EGB. *Enseñanza de las ciencias*, 6. (1) 251-252

- Balderas, F. (1999). *Propuesta didáctica la aplicación de procedimientos heurísticos y situaciones problemáticas en la resolución de problemas matemáticos I*. Maestría en la Enseñanza de la Ciencias con Especialidad en Matemáticas. Universidad Autónoma de Nuevo León. Ciudad Universitaria. p. 8
- Balderas, F. (1999). *Propuesta didáctica la aplicación de procedimientos heurísticos y situaciones problemáticas en la resolución de problemas matemáticos I*. Maestría en la Enseñanza de la Ciencias con Especialidad en Matemáticas. Universidad Autónoma de Nuevo León. Ciudad Universitaria. p. 8
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Shoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática N°1*. Recuperado de: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno1/cuadernos%201%20c%204.pdf>.
- Camejo, A. (2006). La epistemología constructivista en el contexto de la post-modernidad. *Revista Crítica de Ciencias Sociales y Jurídicas NOMADA*. ISSN 1578-6730. España. p. 3
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Cuba. *Revista Iberoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2(3), 31 – 45.
- Cardoso y Cerecedo (2008). El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia. *Revista Iberoamericana de Educación*. 47. p. 2
- Chadwick, C. (2001). La psicología del aprendizaje del enfoque constructivista. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*. Vol. XXXI N° 004. p. 112.
- Charnay, R. (1994), “Aprender (por medio de) la resolución de problemas”, en Parra, C. y Saiz I., *Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19 – 58.
- De la Vega, M. (1984). *Introducción a la psicología cognitiva*, Madrid: Alianza.
- Driver, R. (1986). “Psicología cognoscitiva y esquemas conceptuales de los alumnos”. En *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 4, No. 1. pp. 3-15.
- Gagné, E. (1991). *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar*, Madrid: Visor.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (1997) *Metodología de la Investigación*. Mc Graw Hill, México.
- ICFES (2009, a). Resultados de Colombia en TIMSS 2007 Resumen Ejecutivo. Recuperado de: [http://hydra.icfes.gov.co/timss/docs/Resultados2007\\_ResumenEjecutivo\\_Ago2009.pdf](http://hydra.icfes.gov.co/timss/docs/Resultados2007_ResumenEjecutivo_Ago2009.pdf)
- ICFES (2009,b). Prueba Saber 5°. *Matemáticas grado 5 – calendario A*. Recuperado de: <https://sites.google.com/a/turboeducado.edu.co/pruebasaber/saber-5-2010>
- ICFES (2010, a). *Colombia en PISA 2009. Síntesis de resultados*. Recuperado de: [http://www.icfes.gov.co/pisa/phocadownload/pisa2009/infome\\_pisa\\_2009.pdf](http://www.icfes.gov.co/pisa/phocadownload/pisa2009/infome_pisa_2009.pdf)
- ICFES (2010, b). *SABER 5° y 9° 2009 Resultados Nacionales. Resumen ejecutivo*. Recuperado de: [http://www.icfes.gov.co/saber59/images/pdf/INFORME\\_SABER.pdf](http://www.icfes.gov.co/saber59/images/pdf/INFORME_SABER.pdf)
- ICFES. (2010, c). *Resultados Censales SABER 5° y 9° 2009*. Establecimiento Educativo: Institución Educativa Máximo Mercado (Atlántico). Recuperado de: <http://www.icfessaber.edu.co/graficar/institucion/id/108638000267/grado/5/tipo/2>
- ICFES. (2010, d). Orientaciones para la lectura e interpretación de los resultados de SABER 2009. Recuperado de: [http://www.icfessaber.edu.co/uploads/documentos/guia\\_completa\\_2009.pdf](http://www.icfessaber.edu.co/uploads/documentos/guia_completa_2009.pdf)
- ICFES (2012). Componentes Estándares básicos de Competencia. Recuperado el 26 de agosto de 2012 [www.icfes.gov.co/examenes/prueba-saber](http://www.icfes.gov.co/examenes/prueba-saber)
- Larios, V. (2000). Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática. Tesis de Maestría. México. Universidad Autónoma de Querétaro.
- Mayer, R. (1992) *Problem Solving, Cognition*. W.H. Freeman and Co. NY.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares. Matemáticas*. Bogotá. Recuperado de: [http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)
- MEN (2005). ¿Cómo interpretar la evaluación pruebas saber? Recuperado de: [www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-91485\\_archivo.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-91485_archivo.pdf)
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá

- MEN. (2012). Actividad Diagnóstica grado 5°. Monereo, C. (coord.), Castelló, M., Clariana, M., Palma, M., y Pérez, M. L. (1998). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la escuela*, 5ª ed., Barcelona: Editorial Graó.
- Parra, B. (1990): “Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas en la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria”. *Revista Educación Matemática*, vol. 2, núm.3, diciembre 1990. México, D.F.: Secretaría de Educación Pública. (pp. 13-32).
- Polya, G. (1957). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Ed. Tecnos.
- Polya, G. (1962): *Mathematical discovery*. New York: John Wiley and Sons.
- Po.lya, G. (1965): *How to solve it*. Princenton University Press (Traducción: *Cómo plantear y resolver problemas*, de Julián Zagazagoitia, Ed. Trillas. México)
- olya, G. (1980). En la resolución de problemas matemáticos en la escuela secundaria. En Krulik, S. y Reys, R. E. (Eds.), *La resolución de problemas en las matemáticas escolares*, p.1, Virginia.
- Pozo, J.I. y Postigo, Y. (1994). *La solución de problemas como contenido procedimental en la Educación Obligatoria*. En: J. I. Pozo, *La solución de problemas*. Madrid: Santillana.
- Robledo Martin, J. Diseños de muestreos probabilísticos (II). *Nure Investigación*, núm. 12; febrero 2005.
- Santos, L. M. (1992). “Resolución de problemas: el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas”, *Revista Matemática Educativa*, Vol. 4, núm. 2, agosto 1992, pp. 16-24.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Sternberg, R.J. (1987): “Razonamiento, solución de problemas e inteligencia”. En R.J. Sternberg (Ed): *Inteligencia humana (vol. II): Cognición, personalidad e inteligencia*. Barcelona: Paidós.
- Toro, A. y Marcano, L. (2005) La categoría paradigma en la investigación social. *Heurística*, 3, 4-20.
- Valle, M., Juárez, M. y Guzmán, M. E. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista electrónica de Investigación Educativa*, 9. Recuperado de: <http://ridie.uabc.mx/vol9no2/contenido-valle.html>.
- Vanega, Y. y López, M. (2007). *Problemas. Desarrollo de habilidades para la formulación y resolución de problemas 5*. Serie proyectos de área. Libros & libros S.A. Bogotá.