

Caracterización del conocimiento especializado del profesor que enseña la hipérbola a través de las TIC



Cómo citar el artículo

Padilla-Escorcía Iván Andrés; Acevedo-Rincón Jenny Patricia (2023) Caracterización del conocimiento especializado del profesor que enseña la hipérbola a través de las TIC. Revista Encuentros, vol. 21-02 de julio-dic. Universidad Autónoma del Caribe.

Doi: [10.15665/encuen.v22i02-Julio-Dic..3253](https://doi.org/10.15665/encuen.v22i02-Julio-Dic..3253)

Iván Andrés Padilla-Escorcía. PhD. (C) Universidad del Atlántico, Colombia
iapadilla@mail.uniatlantico.edu.co, <https://orcid.org/0000-0003-1210-3712>

Jenny Patricia Acevedo-Rincón. PhD. Universidad Industrial de Santander
jepaceri@uis.edu.co, <https://orcid.org/0000-0003-3872-5130>

Recibido: 10 de marzo de 2023 / Aceptado: 29 de junio de 2023

RESUMEN

En la actualidad las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) han tomado relevancia en las prácticas del profesorado de matemáticas, lineamientos nacionales han exigido que esta sea una competencia integrada en los licenciados. No obstante, dado la flexibilidad en el país con respecto a que cualquier profesional con formación a fin a la licenciatura en Matemática puede ejercer como profesor, impide que los profesores en ocasiones utilicen los recursos tecnológicos de manera efectiva y acorde a las necesidades educativas de hoy día. Así, el objetivo de esta investigación es caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que enseña la modelación de la hipérbola y sus partes mediante las TIC. El enfoque de esta investigación es cualitativo, con diseño estudio de caso de tipo instrumental, se utilizan el cuestionario y la observación no participante como técnicas de recolección de la información a un profesor que enseña matemáticas en décimo de la media-secundaria utilizando las TIC, especialmente el software *GeoGebra*. Entre las relaciones halladas en esta investigación se tiene el conocimiento de las prácticas y enseñanza de la matemática como aproximación a la modelación gráfica de la hipérbola mediante *GeoGebra*.

Palabras Clave: Conocimiento especializado, profesor de matemáticas, Tics, hipérbola, enseñanza de las matemáticas.

Characterization of the specialized knowledge of the teacher who teaches the hyperbola through ICT

ABSTRACT

Currently Information and Communication Technologies (ICT) have become relevant in the practices of mathematics teachers, national guidelines have demanded that this be an integrated competence in graduates. However, given the flexibility in the country that any professional with training for a degree in Mathematics can work as a teacher, it prevents teachers from using technological resources effectively and according to today's educational needs. day. Thus, the objective of this research is to characterize the specialized knowledge of the mathematics teacher who teaches the modeling of the hyperbola and

its parts through ICT. The approach of this research is qualitative, with an instrumental type case study design, the questionnaire and non-participant observation are used as information collection techniques to a teacher who teaches mathematics in tenth of secondary school using ICT, especially the GeoGebra software. Among the relationships found in this research is the knowledge of the practices and teaching of mathematics as an approximation to the graphic modeling of the hyperbola through GeoGebra.

Keywords: *Specialized knowledge, mathematics teacher, Itcs, hyperbole, mathematics teaching.*

Caracterização do conhecimento especializado do professor que ensina a hipérbola através das TIC

RESUMO

En la actualidad las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) tem tomado relevância nas práticas do professor de matemática, lineamientos nacionais têm exigido que esta seja uma competência integrada nos licenciados. No entanto, dada a flexibilidade no país com respeito a que qualquer profissional com formação a fim de licenciatura em Matemática pode exercer como professor, impede que os professores em ocasiões utilizem os recursos tecnológicos de maneira eficaz e acordem com as necessidades educativas de hoje dia. Assim, o objetivo desta investigação é caracterizar o conhecimento especializado do professor de matemática que ensina a modelação da hipérbola e sus partes através das TIC. A abordagem desta investigação é cualitativa, com design de estudo de caso de tipo instrumental, se utiliza o questionário e a observação não participante como técnicas de coleta de informações a um professor que ensina matemática em décimo da mídia secundária utilizando as TIC, especialmente o software GeoGebra. Entre as relações apresentadas nesta investigação se tem o conhecimento das práticas e enseñanza da matemática como aproximação à modelagem gráfica da hipérbola por meio do GeoGebra.

Palavras-chave: *Conocimiento especializado, professor de matemáticas, Tics, hipérbola, enseñanza de las matemáticas.*

1. Introducción

En los último tiempos, a nivel mundial, programas de formación del profesorado han sufrido reestructuraciones en sus currículos, la necesidad de que estos incluyan con mayor frecuencia las TIC como competencia inmersa en las prácticas del profesional que se pretende formar ha sido sugerido por organismos internacionales como La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco) y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), quienes aseguran que estas herramientas son claves en la transformación de los sistemas de educación en el fortalecimiento de los resultados de aprendizaje en los estudiantes, dado su facilidad para evaluar de manera formativa, orientada y cooperativa. Por lo que se considera las TIC como una competencia fundamental del profesorado del siglo XXI (Unesco, 2017; OCDE, 2019).

De acuerdo con la anterior, la educación matemática no ha sido la excepción, ya que distintos recursos tecnológicos han surgido para potenciar el quehacer y las prácticas pedagógicas de los profesores (Granados-Ortiz y Padilla-Escorcía, 2021). Ante esto, es relevante que los profesores conozcan y apliquen las TIC en la enseñanza de las matemáticas, de manera que el uso de estas herramientas y/o recursos facilite la conceptualización y habilidades de los estudiantes en el aprendizaje, particularmente

el que se basa en problemas del mundo real y como apoyo didáctico para el profesorado en la enseñanza innovadora de las matemáticas (Padilla-Escorcía, Conde-Carmona y Tovar-Ortega, 2022; Stein, Gurevich y Gorev, 2020; Padilla-Escorcía y Conde-Carmona, 2020; Chizwina y Mhakure, 2018).

Aparte, las TIC permiten elaborar representaciones y simulaciones por computadoras como apoyo al aprendizaje basado en modelos, de modo que los estudiantes pueden interpretar conceptos matemáticos y científicos de manera más elaborada. Por lo que software matemáticos como Geogebra son relevantes en este tipo de situaciones del álgebra, la geometría y el cálculo dada su funcionalidad interactiva en la enseñanza de esta área del conocimiento (Hillmayr et al., 2020).

Ahora bien, siguiendo esa misma línea, en educación matemática han sido propuesto diversos modelos que describen el conocimiento especializado con el que debe contar todo profesor que enseña matemáticas. Así, es interesante que en Carrillo et al. (2013) y Carrillo et al. (2018) se propone un modelo que engloba no solamente el saber matemático especializado del profesor, sino también su conocimiento didáctico del contenido. Este es, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en inglés Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), que considera útil para la profesionalización del profesorado de matemáticas en términos de su conocimiento especializado (Advíncula et al., 2021).

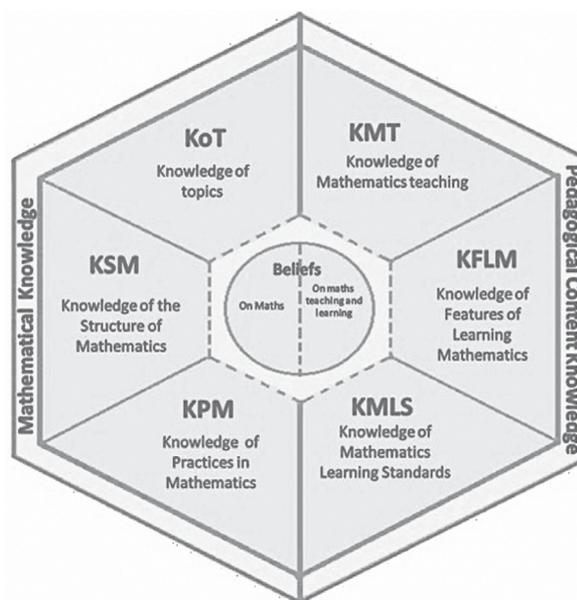
El eje central del modelo está determinado por dos dominios que caracterizan el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas. Lo cual guarda relación con esta investigación, ya que mediante este modelo de conocimiento, es posible analizar el quehacer de un profesor que enseña contenidos de las matemáticas escolares, usando mediaciones tecnológicas. Un ejemplo de esto, han sido las investigaciones recientes realizadas por Padilla-Escorcía (2022), Padilla-Escorcía y Acevedo-Rincón (2021), Padilla-Escorcía y Acevedo Rincón (2022) y Padilla-Escorcía, Acevedo-Rincón y Montes-Navarro (2023), que han estudiado las características de conocimiento especializado del profesor de matemáticas que enseña contenidos de las matemáticas como las funciones trigonométricas y secciones cónicas como la elipse y la circunferencia. En ese orden, esta investigación pretende encontrar las relaciones que realiza el profesor de matemática entre la propia matemática, específicamente en el contenido correspondiente a la sección cónica hipérbola y sus partes, con el componente pedagógico del mismo, de manera que se pueda explorar acerca de si dicho conocimiento del profesor está alineado a las necesidades educativas de hoy, con respecto a que el profesor que enseña matemáticas utilizando este tipo de herramientas debe hacerlo con fines de una enseñanza más práctica que a lo que están acostumbrados los estudiantes (educación tradicional)

EL MODELO MTSK

Esta investigación está fundamentada en el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), el cual abarca el dominio del conocimiento matemático (MK) que necesita un profesor para enseñar matemática, y que está arraigado al conocimiento del profesor acerca de los contenidos que enseña, así como de cualquier actividad que desarrolle y que trasciende al ser un conocimiento superior al que se espera desarrollen los estudiantes. Así mismo, el conocimiento de la naturaleza de la cual se derivan cada contenido de las matemáticas (Carrillo et al, 2018; Advíncula et al, 2021). Por su parte, el conocimiento didáctico del contenido (PCK), que es el conocimiento del profesor sobre los contenidos en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, considerándose este dominio del profesor como aquel que distingue la comprensión como especialista del contenido al ser profesional de la materia, si se compara con la del pedagogo (Muñoz, Liñan y Ribeiro, 2017; Montes, 2015). Estos dos dominios: MK y PCK se subdividen en tres subdominios cada uno como se observa a continuación en la Figura 1:

De acuerdo con la Figura 1, se tiene que en la parte izquierda del modelo se encuentra el dominio de conocimiento de las matemáticas (MK), el cual incluye 3 subdominios que son: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de las estructuras matemáticas (KSM) y conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM). Por su parte, a la derecha del modelo se ubican los subdominios del conocimiento didáctico del contenido (PCK), que incluye el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS). En el centro del modelo se encuentran las creencias del profesor tanto de la matemática pura, como de la enseñanza y aprendizaje de las mismas, ligadas a su experiencia y práctica diaria.

Figura 1. Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas



Fuente. Carrillo et al. (2018)

Subdominios del conocimiento matemático (MK)

Del MK, se tienen los subdominios: (i) *conocimiento de los temas (KoT)*, que se define como el conocimiento de los contenidos matemáticos que enseña el profesor de manera fundamentada, esto es el: ¿cómo?, ¿por qué? Y ¿para qué? De las ideas matemáticas que este quiere que sus estudiantes comprendan, pero de manera más desarrollada. Incluye las categorías de fenomenología y aplicaciones, procedimientos, definiciones, propiedades y registros de representación (Flores et al., 2014; Espinosa-Vásquez, Zakaryan y Carrillo, 2018); (ii) *conocimiento de las estructuras matemáticas (KMS)*, que corresponde al conocimiento del profesor para realizar conexiones entre los contenidos de las matemáticas que enseña independientemente del nivel de escolaridad en el que se encuentre. Esto es, de grado superior o inferior al contenido que se esté enseñando, de modo que, estas conexiones simplifiquen o complejicen una temática en particular propia de las matemáticas (relaciones interconceptuales e intraconceptuales) (Montes y Carrillo, 2017); y (iii) *conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM)*, que es el conocimiento del profesor acerca de la validez en matemáticas, tipos de demostraciones, las formas de proceder, así como prácticas de su quehacer como la modelación y generalización matemática (Montes y Carrillo, 2017; Lima, 2017).

Subdominios del contenido didáctico-pedagógico del contenido (PCK)

El dominio PCK incluye los siguientes subdominios: (i) *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)*, el cual es el conocimiento del profesor acerca de las dificultades que presentan sus estudiantes para aprender matemáticas, así como sus motivaciones e intereses, basado en sus propia experiencia o teorías institucionalizadas de la educación matemática (Carrillo et al, 2018); (ii) *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)*, es el conocimiento del profesor acerca de la potencialidad de estrategias, recursos, ejemplos, actividades y tareas en la enseñanza de los contenidos de matemáticas, apoyados en teorías en Educación Matemática o de la propia experiencia de la práctica del profesor (Montes, Contreras y Carrillo, 2017); y (iii) *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)*, que se define como el conocimiento del profesor acerca del

nivel de profundización con el que debe ser abordado un contenido por los estudiantes dependiendo al nivel de escolaridad en el que se encuentren, basado en organismos nacionales e internacionales como del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) y del Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) que determinan las competencias a desarrollar por los estudiantes de acuerdo al grado en el que se encuentren.

2. Metodología

Esta investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo Stake (2010), ya que busca describir, interpretar y analizar el conocimiento especializado del profesor para modelar las partes de la hipérbola mediante el software especializado *GeoGebra* como herramienta para la enseñanza de las matemáticas. Para esto, se realiza un diseño de estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 2005), debido a que, a partir del estudio de una situación única, se busca comprender la realidad de enseñar matemáticas escolares utilizando la tecnología. Las técnicas de recolección de datos en esta investigación son: (i) *cuestionario al profesor*, cuyo objetivo consistía en conocer de la formación profesional en TIC, implementación de recursos TIC en su práctica pedagógica y acercamientos al modelo MTSK del profesor participante. Es importante señalar que este cuestionario se aplicó previo a las observaciones de clase, para así, identificar el potencial del profesor para usar las TIC, eje central de la investigación; y (ii) *observaciones no participantes en la modalidad presencial y virtual-remota*, las cuales fueron 13. Sin embargo, para términos de este estudio, se centró la atención en los episodios en los cuales el profesor enseñaba la hipérbola y sus partes utilizando recursos tecnológicos como medio.

Por otra parte, esta investigación tuvo escenario en una institución de carácter privado de la ciudad de Barranquilla-Colombia, con un profesor de matemática del grado décimo con conocimiento del software *GeoGebra*, ya que durante 3 años lo había utilizado en su práctica pedagógica. Se adaptó el criterio de Simons (2011) para la elección del caso, ya que de un conjunto de casos posibles con características que buscaba el investigador analizar, con respecto a formación y experiencia en la enseñanza de las matemáticas escolares utilizando TIC, el profesor Pablo (nombre ficticio) fue el elegido, la diferencia entre Pablo y otros casos que fueron considerados, estuvo enmarcada en que este además había participado en eventos científicos y publicado artículos científicos relacionados con la educación matemática mediada por las TIC.

Ahora bien, en el episodio seleccionado para este estudio, el profesor buscaba representar dinámicamente la hipérbola con centro en $(0,0)$ y sus respectivas partes de manera gráfica en *GeoGebra*, y que a partir de eso, existiera mayor comprensión de los estudiantes en cuanto al significado de la definición teórica de cada una de las partes de la hipérbola expresada en coordenadas. Así, en este estudio, el análisis se centra en los subdominios de conocimiento de los temas (KoT) y conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), además de acercamientos del conocimiento de las prácticas matemáticas (KMT) que contribuyen a la caracterización del conocimiento especializado del profesor para enseñar la hipérbola y sus partes usando las TIC; por su parte, es importante recalcar que las sesiones de clase ya habían sido planificadas previamente por el profesor.

3. Resultados

El episodio que se presenta a continuación se desarrolla en dos momentos, en uno el profesor representa gráficamente las partes más comunes de la hipérbola (focos, vértices, eje focal, asíntotas) en *GeoGebra*. En este extracto de la clase, Pablo muestra indicios de conocimiento de la potencialidad

Pablo Bueno y si se dan cuenta ¿qué valor sería la intersección entre la curva o rama de la hipérbola y el eje focal?, ¿el valor de quién? [Pausa] de los vértices, ¿si los ven?

Estudiante B De V_1 y V_2

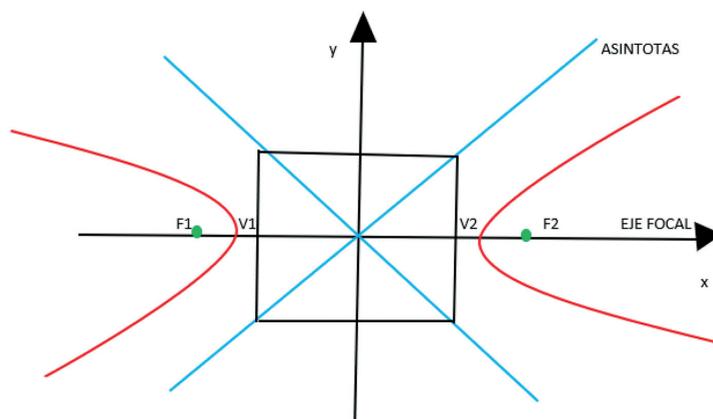
Pablo OK, una pregunta, ¿esto no se les haría más fácil hacerlo a mano? [Pausa] ustedes dirían sí [pausa], sin embargo pueden hacerlo de esta forma también en sus cuadernos. ¿Quién me faltó?, ¿no me faltó nada?, ¿cierto? [Pausa], tenemos nuestro centro, F_1 y F_2 , que le puedo dar los valores aquí (obsérvese figura 2) de manera general, ese puntico verde que aparece ahí, es nuestro foco.

Luego la intersección de ellos (focos) serían los vértices.

¿Qué otra parte me falta? [Pausa], bueno tenemos también el eje focal, porque pasa exactamente por el par de focos de nuestra hipérbola. ¿Qué más valor me falta colocar?

[pausa] ¿Quiénes son mis asíntotas? Las líneas verdes, ¿cierto?

Figura 2. Representación de las partes de la hipérbola en GeoGebra (Eje focal, asíntotas, focos (F_1 y F_2), vértices (V_1 y V_2))



del recurso para a través de *GeoGebra* visualizar cada una de las partes de la sección cónica (KMT), así como de ejemplos que contribuyen en la enseñanza de la hipérbola (KMT) al utilizar las TIC. El otro momento, está enfocado en la visualización de otras partes de la hipérbola (eje conjugado y lado recto), donde Pablo relaciona SUS conocimientos de los temas (KoT) con sus conocimientos de la enseñanza de las matemáticas (KMT), subdominios del MTSK para gráficamente comprobar cada una de las definiciones de estas partes de la hipérbola. En cuanto al KoT, existen acercamientos de conocimiento de Pablo de los registros de representación, para gráficamente representar las partes de la hipérbola a través de comandos del software *GeoGebra* (potencialidad del recurso), como se observa en el siguiente dialogo que sostiene con sus estudiantes (nombrados con letras mayúsculas del abecedario para diferenciarlos entre sí).

Estudiante B Aja

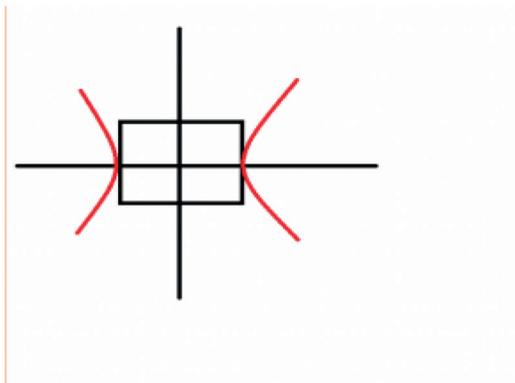
Estudiante H Las azules

Pablo Cierto, que tengo el problema en mi vista.

Estudiante H Mr. una pregunta, yo encontré que la hipérbola compartía un punto en el eje x con el cuadrado, o sea su vértice era justamente el cuadrado

Pablo Sí, es aquí si no que yo no puedo poner el valor aquí porque me queda ahí dentro, o sea mira te voy a hacer un bosquejo y tú me dices si es así (obsérvese figura 3) y ahí tengo mi hipérbola, ¿sí o no? ¿Eso es lo que me dices?

Figura 3. Ejemplificación de las ramas de la hipérbola en Paint.



Estudiante H Sí Mr.

Pablo OK, pero después yo no podía escribir la v acá dentro (figura 3) porque no se veía o la escribía abajo, pero eso va ahí, de hecho lo índico como punto de intersección, es como si yo hiciera encima de la hipérbola un cuadrilátero que lo toque, ¿si lo ves?

Estudiante H Cierto, que tengo el problema en mi vista.

Estudiante H Efectivamente

Pablo OK, ¿ya la hicieron? (gráfica), los que no lo han hecho, pueden guiarse del paso a paso.

Estudiante J Mr. ¿pero entonces esto último como lo vamos a dibujar?

Pablo Como tú quieras, es el mismo, lo que debes tener en cuenta es que la rama de la hipérbola va pegada

Estudiante J Pero yo hablo de los nombres

Pablo Ah, pero tú hablas de los nombres, cualquiera de las dos tú le colocas los nombres y ya yo los definí en el Word.

Estudiante J OK, dale ¡todo bien!

Pablo Tú decides cuál de las dos te queda más fácil hacer [pausa] ¿ya la hicieron?

En este episodio, se resalta que Pablo evidencia conocimiento de los registros de representación, categoría del KoT, ya que propone la representación gráfica de la hipérbola horizontal con centro en $(0,0)$ en *GeoGebra*, así mismo de sus partes, como se observa en la Figura 2. Pablo ejemplifica con dos puntos en color verde las distancias de los focos desde el centro de la hipérbola hasta un punto c del eje x , para representar las coordenadas $F1 = (-C,0)$ y $F2 = (C,0)$. Del mismo modo, Pablo representa los vértices $V1$ y $V2$ de la hipérbola al intersecar el eje de las x con las ramas que contiene esta. Es interesante que en estas representaciones Pablo utiliza un cuadrado como estrategia para que los estudiantes en el gráfico visualicen la notación de los vértices ($V1$ y $V2$) como se observa en la Figura 2, y que corresponde al conocimiento del profesor de la notación matemática, tipo de registro de representación (KoT), en la enseñanza de las matemáticas. Por su parte, en la representación de las asíntotas de la hipérbola pablo utiliza la perpendicularidad para formar dos rectas que se cortan en el plano cartesiano y que son muy cercanas a las ramas que conforman la hipérbola horizontal, pero que no alcanzan a tocar a las mismas.

Sin embargo, las representaciones dinámicas de las partes de la hipérbola en *GeoGebra*, generó inquietudes en los estudiantes como la siguiente: “Mr. yo encontré que la hipérbola compartía un

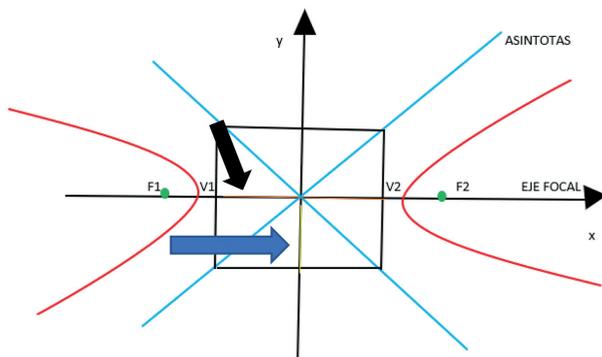
punto en el eje x con el cuadrado, o sea su vértice era justamente el cuadrado”, situación que muestra el conocimiento de Pablo acerca de *ejemplificaciones que contribuyan en la enseñanza de la hipérbola*, categoría del KMT, ya que debido al cuestionamiento que se realiza el estudiante, Pablo construye la gráfica en Paint, que corresponde a la hipérbola que este relaciona, como se observa en la Figura 3. En esta gráfica el vértice de la hipérbola coincide con el cuadrado antes plasmado y con la rama de la hipérbola. Por lo que se intuye que Pablo afirma que dicha gráfica es la representación en su totalidad de la hipérbola horizontal, no obstante, aclara que utiliza la Figura 2, para notar matemática a los vértices y que estos puedan ser visibles por los estudiantes en general.

Del mismo modo, también se observa conocimiento de Pablo acerca del potencial de los recursos virtuales (KMT), ya que este hace uso del comando formas del programa Paint para plasmar la gráfica de la hipérbola, en donde los vértices cortan a las ramas de esta; situación similar ocurre con *GeoGebra* en donde también Pablo aprovecha el potencial de este software en la enseñanza de las matemáticas, para por medio de colores marcar la representación de las partes de la elipse, como es el caso de las asíntotas, cuya asignación es color azul, o las coordenadas de los focos con color verde y las ramas de la hipérbola con color rojo. Es así, como se intuye que Pablo realiza este tipo de acciones para que exista más visualización de las partes de la hipérbola en los estudiantes, dado la similitud por ejemplo entre los ejes de plano cartesiano con las asíntotas.

Por otra parte, también se muestran conocimientos de Pablo del registro de representación (KoT) para representar gráficamente otras partes de la hipérbola que no son tan comunes plasmar en el plano cartesiano, como es el caso del lado recto y el eje conjugado, así como de la enseñanza de las matemáticas para mediante las TIC (*GeoGebra*) hacer efectiva la representación de las partes de la hipérbola que se mencionan, como se observa en el diálogo que sostiene Pablo con sus estudiantes:

- Estudiante B** Mr. ¿y esas cosas qué dicen eje conjugado, lado recto?, ¿esas cuáles son?
- Pablo** ¿En el qué?
- Estudiante B** Es que o sea en las definiciones que estábamos copiando, tú nos hablabas por ejemplo de: ejes transversos, eje conjugado, lado recto, ¿esos cuáles son?
- Pablo** Efectiva OK, estas son las particiones que aparecen aquí (gráfico), ¿estás viendo mi pantalla?
- Estudiante B** OK, ¿ya la hicieron? (gráfica), los que no lo han hecho, pueden guiarse del paso a paso.
- Estudiante J** Sí
- Pablo** ¿Y ves mi cursor?
- Estudiante B** Sí
- Pablo** OK, este fragmento o segmento de línea que pasa como diagonal, se llama eje transversal, si lo nombro todo se llama asíntota, pero si pasa por aquí nada más ese fragmento es nuestro eje transversal [pausa], recordemos que, ¿cuándo una línea es transversal? O ¿cuándo una línea es transversal? [pausa], cuando corta dos paralelas, y si te das cuenta ahí tienes dos paralelas
- Estudiante B** OK
- Pablo** ¿Y cuál fue el otro que me preguntaste? ¿El eje conjugado? [Pausa], este viene siendo como si fuera el eje y, pero marcando los vértices, desde aquí hasta acá en este punto de corte [obsérvese figura 4) te voy a trazar un segmento, el amarillo, ¿lo ves estudiante B?

Figura 4. Modelación del eje conjugado (flecha azul) y eje transverso (flecha negra) de la hipérbola con centro en $(0,0)$ en GeoGebra



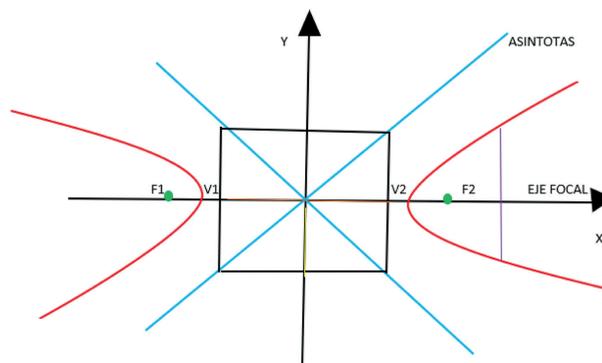
Estudiante B Ok

Pablo Ese es el eje conjugado, y este que tracé en naranja ¿cuál es?

Estudiante B Eje transverso

Pablo ¿Qué más me faltó por ahí?, obviamente el eje normal es el eje completo y, ah y el lado recto que la definición lo dice clarito, es el segmento que une dos puntos de la hipérbola que vendría siendo más o menos este que está aquí (obsérvese figura), ¿si lo viste?

Figura 5. Modelación del lado recto (flecha azul) de la hipérbola con centro en $(0,0)$ en GeoGebra



Estudiante B Sí, perfecto

Pablo OK, retomo, focos, vértices, que son la intersección de las ramas de la hipérbola con el rectángulito que hicimos aquí, líneas azules vienen siendo nuestras asintotas, recordemos que una asintota es aquella que por mucho que se acerque, nunca va a tocar la función, en este caso no tenemos una función, pero si tenemos una sección cónica que sería la hipérbola y no la va a tocar por mucho que se acerque, por eso recibe el nombre de asintota. Ahora bien, este eje que está aquí en verde y amarillito se dan cuenta que están dentro de las intersecciones de las asintotas, ellas tienen un nombre, como están dentro de un rectángulo, tiene paralelas, existe una línea transversal que es la naranjita, digamos que es la que une las dos diagonales, pero necesariamente pasan por el centro, y la otra que tengo aquí en amarillo es nuestro eje conjugado y también pasa exactamente por el centro.

Estudiante B Mr. una pregunta, ¿el lado recto no tiene que pasar por el foco?, ¿o sea como que nada más tiene que estar recto y perpendicular?

Pablo Sí, sino que en la gráfica me quedaba muy pequeñito

Estudiante B Ah OK, tiene que pasar

Pablo Sí, en la definición creo que se los coloqué.

Estudiante B Sí dale

En este apartado del episodio se muestra conocimiento de Pablo de los registros de representación (KoT) para representar las partes de la hipérbola en el software *GeoGebra*. Ahora, es llamativo que a partir de la siguiente pregunta que hace el estudiante B: *¿Mr. y esas partes que dicen eje conjugado, eje transversal y lado recto, cuáles son?*, Pablo aprovecha de su conocimiento de las otras partes de la sección cónica, para visualizarlas en la gráfica que tenía hasta entonces, sabiendo que la recta que tiene que construir como representación del eje transversal debe cumplir con las condiciones de ser una recta que corte a dos paralelas, como se observa en la Figura 4, que es la recta que utiliza con color naranja y que corta a las dos rectas que conforman el cuadrado donde los vértices de la hipérbola también tienen puntos de intersección. En ese sentido, Pablo representa el eje conjugado tomando como referencia el eje y , pero desde el punto de donde se intersecan los vértices con las ramas de la hipérbola hacia abajo, como se ilustra en la Figura 4 con color amarillo; de manera similar Pablo representa el lado recto, utilizando el comando puntos de *GeoGebra*, los ubica en una de las ramas de la hipérbola ya plasmada, y los une, formando un segmento que indica con color morado, como se observa en la Figura 4 y que cumple la condición de unir dos puntos de la hipérbola.

A su vez, Pablo muestra conocimiento acerca del *potencial de GeoGebra para la enseñanza de las partes de la hipérbola* (KMT), ya que conoce que mediante el comando puntos de este software puede plasmar dos puntos que le permiten hacer la representación del lado recto a cualquiera de las dos ramas que conforman la hipérbola. De igual manera, utiliza el comando de colores con algunos segmentos de la gráfica como se observa en las Figuras 4 y 5, para luego de realizar la representación del eje transversal, eje conjugado y eje recto, visualmente estos se puedan diferenciar uno del otro, como ocurre en la Figura 5, la cual muestra que el eje transversal es el segmento de color naranja, el eje conjugado el de color amarillo y el lado recto del color morado. Esto es clave si se tiene en cuenta que el desarrollo de esta clase se da bajo las condiciones de la modalidad virtual-remota, por lo que la visualización se intuye es de los elementos por los que Pablo más se esfuerza se evidencie en su clases en la enseñanza de las matemáticas.

4. Análisis y discusiones

En este episodio se evidencia conocimiento especializado del profesor, particularmente en el conocimiento de los temas (KoT) y la enseñanza de las matemáticas (KMT), siendo este último subdominio donde se muestra más el conocimiento de Pablo para mediante el software *GeoGebra* y el programa *Paint* enseñar utilizando las TIC las partes de la hipérbola. En ese sentido, y de acuerdo a las observaciones realizadas, el profesor muestra indicios de dominio de algunas categorías de estos subdominios del MTSK. En cuanto al KoT, el que más se evidencia es el *conocimiento de los registros de representación de los contenidos que enseña*, ya que a partir de esto, se le facilita relacionar las definiciones de las partes de la hipérbola (focos, vértices, eje transversal, eje conjugado y lado recto) con sus representaciones en el gráfico de la hipérbola en *GeoGebra*. Siendo interesante que el conocimiento de Pablo para hacer el registro gráfico de estas partes le permite ubicar las coordenadas de los focos a la misma distancia del centro (puntos en color verde de la Figura 2); situación análoga en la representación de los vértices de la hipérbola horizontal con centro (0,0), para esto utiliza un cuadrilátero que permite visualizar a los estudiantes las coordenadas de los vértices.

No obstante, esta situación se intuye que repercute en que el profesor muestre incongruencias en el conocimiento de las definiciones del contenido que enseña (KoT), debido a que la representación de la hipérbola y sus partes en *GeoGebra* (Figura 2) no coinciden con la definición correspondiente a que los

vértices de la hipérbola se intersecan con las ramas de la hipérbola, lo que conceptualmente es un error que comete el profesor al priorizar con la notación matemática (KoT), sin embargo, al ser cuestionado e interrogado por un estudiante, Pablo es creativo y representa la definición de las coordenadas de los vértices en otro documento, como se observa en la Figura 3 al ejemplificar las ramas de la hipérbola. Así, en otro apartado del episodio, se muestra escasos de conocimiento de Pablo en la categoría de definiciones (KoT), ya que cuando él afirma que el lado recto es un segmento que une dos puntos de la hipérbola, un estudiante pregunta lo siguiente: *¿Mr. el lado recto no tiene que pasar por el foco?*, ante esto, Pablo asegura que sí, pero no trazó el segmento por el foco ya que la longitud de este sería poco visible para los estudiantes, pese a esto, no realiza una representación que muestre que el lado recto de la hipérbola si pasa por los focos, y no como Ilustró en la Figura 5, donde se observa que el segmento representado no corresponde a la definición de lado recto.

Ahora bien, en cuanto al KMT Pablo evidencia conocimiento acerca de *“saber el nivel de potencialidad de recursos materiales y virtuales en el modelado de las partes de la hipérbola”* puesto que en múltiples apartados del episodio utiliza comandos del software *GeoGebra* como: puntos, segmento y colores, para mediante ellos realizar la representación de las partes de la hipérbola. Se prevé que Pablo sabe que en este software los estudiantes pueden visualmente hacer comparaciones entre las definiciones formales con su representación y por tanto utiliza animaciones con colores como se observa en las Figuras 4 y 5 para establecer diferencias entre los ejes conjugado (amarillo) y transversal (naranja) al ser los dos segmentos y tener definiciones similares; en cuanto al programa *Paint*, se evidencia que Pablo conoce del potencial de este, la Figura 3 es un indicador, debido a que a través de los comandos de recta y curva se pueden plasmar hipérbolas que representen situaciones particulares que ocurren en ella. Como es el caso de que los vértices corten en un punto las ramas de la cónica. En ese orden, se considera esto como un momento clave de la clase, puesto que permitió diferenciar las representaciones de las Figuras 2 y 3, es decir la que Pablo representó en *GeoGebra* fomentada a la notación matemática y la que se modeló en *Paint*, fomentada al cumplimiento puntual de las definiciones de cada parte de la hipérbola, siendo esta última, muestra del conocimiento de Pablo acerca de ejemplos para la enseñanza, y que está alineado con la categoría *saber de actividades, tareas, ejemplos que contribuyan en la enseñanza de la hipérbola y sus partes* del KMT, como fue el caso de la Figura 3 que corresponde a la hipérbola horizontal con centro en (0,0) y puntos de corte entre los vértices y las ramas de la hipérbola como respuesta a interrogantes de los estudiantes acerca de la Figura 2 que no cumple con la relación que existe entre los focos, las ramas de la hipérbola y los vértices.

De acuerdo a lo anterior, es interesante notar la relación que se muestra entre las categorías *conocimiento de los registros de representación del KoT y saber el nivel de potencialidad de recursos materiales y virtuales en el modelado de las partes de la hipérbola* e *“identificar y saber de actividades, tareas, ejemplos que contribuyan en la enseñanza de la hipérbola y sus partes”* del KMT, esto es, que dentro del MTSK se presentan micro esquemas entre subdominios y dominios distintos en el modelo, como es el caso del KMT (subdominio del PCK) y el KoT (subdominio del MK), dado que, es necesario conocer de comandos del software *GeoGebra* y de *Paint* para representar de manera gráfica la hipérbola y cada una de sus partes; de manera similar ocurre también con que para poder representar algunas partes de la elipse, es necesario identificar ejemplos que contribuyan en la enseñanza de estas, como es el caso de la Figura 3 en esta investigación. Lo que denota que Pablo relaciona sus conocimientos especializados en matemáticas con el didáctico-pedagógico del contenido para la representación de la hipérbola y sus partes en el software *GeoGebra*.

De igual manera se resalta también conocimiento de Pablo de las definiciones del KoT, ya que para representar cada una de las partes de la hipérbola, es necesario que este sepa de las definiciones y condiciones que debe cumplir cada una de estas para realizar su respectiva representación en el plano. Lo que también confirma lo afirmado anteriormente con respecto a que en el MTSK se presentan micro esquemas entre subdominios de un mismo dominio, como es en este caso entre categorías del KoT, con respecto a que al relacionarse entre sí, generan conocimiento especializado de Pablo en cuanto a lo matemático.

5. Conclusiones

En esta investigación se dieron evidencias de los subdominios KoT y KMT teniendo en cuenta algunas de las categorías que la componen como: definiciones, registros de representación, potencial del recurso y ejemplos para la enseñanza de las matemáticas, particularmente del contenido de la hipérbola y sus partes mediante herramientas TIC como *GeoGebra* y *Paint*. Con esto se comprobó que el profesor requiere de conocimiento de los recursos tecnológicos y de su potencial para integrarlos en la representación dinámica de los contenidos matemáticos a enseñar. Además, se comprobó la relevancia que tiene para profesor relacionar sus conocimientos matemáticos con los didáctico-pedagógicos del contenido, dominios que engloban al conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas mediadas por las TIC.

De la misma manera, de acuerdo al conocimiento especializado por Pablo evidenciado en esta investigación, se considera que algunas cosas podrían ser replicadas en la formación de profesor en Educación Matemáticas. Especialmente la metodología que utiliza para la enseñanza de las matemáticas en la modalidad virtual-remota, ya que realiza preguntas que no son inducidas y que por el contrario conllevan a que el estudiante se cuestione, como se puede apreciar en este episodio de análisis, además del uso de animaciones en las modelaciones de tipo gráfico para identificar cada parte objetivo de estudio, en este caso de la hipérbola, ya que estas permiten visualizar con mayor claridad en la imagen que se proyecta a los estudiantes desde casa, bien sea en el software o en otro tipo de recurso TIC

Agradecimientos

A MinCiencias y su convocatoria 809 formación del capital humano en el Atlántico– Colombia por permitir desarrollar de manera exitosa esta investigación durante los estudios de maestría del primer autor.

Referencias

- Advíncula, E; Beteta, M; León, J; Torres, I; Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de instrumento para su investigación. *Uniciencia*, Vol. 35(1), pp. 1-22, <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.12>
- Carrillo, J; Climent, N; Contreras, L & Muñoz, M. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics. *In Proceedings of the CERME* (Vol 8, pp. 2985-2994)
- Carrillo, J; Climent, N; Montes, M; Contreras, L; Flores, E; Escudero, D; Vasco, D; Rojas, N; Flores, P; Aguilar, A; Ribeiro & M; Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, Págs (236-253), DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981.
- Chizwina, S. & Mhakure, D. (2018). Exploring how the Attributes of Technology Affect Adoption in Teaching Mathematics in a Higher Education Institution in South Africa. *Science and Technology Education*, 276-286.

- Espinosa- Vasquez, G; Zakaryan, D. & Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 21(3), pp. 301- 324, DOI: 10.12802/relime.18.2133
- Flores, E; Escudero, D; Montes, M; Aguilar, Álvaro; & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. *Publisher Universidad de Huelva Publicaciones*, pp. 57 -72
- Granados-Ortiz, C., y Padilla-Escorcía, I. (2021). El aprendizaje gráfico de la recta tangente a través de la modelación de las secciones cónicas utilizando GeoGebra. *Revista Científica*, 40(1), 118-132. <https://doi.org/10.14483/23448350.16137>
- Hillmayr, D; Ziernwald, L; Reinhold, F; Hofer, S. & Reiss, K. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education*, Vol. 153, pp. 1-25, <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897>.
- Lima, I. (2017). Perspectivas del conocimiento especializado del profesor de matemáticas como elemento de su desarrollo profesional. *Tecné Episteme y Didaxis*, N.42, pp. 175-191
- Montes, M. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso. *Universidad de Huelva – Departamento de Didáctica de las Ciencias y la Filosofía*. Huelva
- Montes, M. & Carrillo, J. (2017). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. *Bolema*; Vol. 31(57), pp. 114-134, DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a06>
- Montes, M; Contreras, L. & Carrillo, J. (2017). Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, N. 13, pp. 5 – 20, *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*
- Muñoz, M; Liñan, M. & Ribeiro, M. (2017). Conocimiento especializado para enseñar la operación resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, Vol. 24(n. Especial), pp. 1-17, doi: <http://dx.doi.org/10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19>.
- OCDE (2019). *Estrategias de Competencia de la OCDE 2019. Competencias para construir un futuro mejor*. Ed. 21 *Fundación Santillana: OCDE*
- Padilla-Escorcía, I., y Acevedo-Rincón, J. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: mediaciones con TIC. *Eco matemático*, 12(1), 90-104. <https://doi.org/10.22463/17948231.3072>
- Padilla-Escorcía, I., y Acevedo-Rincón, J. (2022). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de la modelación de la elipse a través de recursos tecnológicos. *Revista Lasallista de Investigación*, 19(1), 67-83. DOI: <https://doi.org/10.22507/10.22507/rli.v19n1a4>
- Padilla-Escorcía, I., Conde-Carmona, R., y Tovar-Ortega, T. (2022). Recursos tecnológicos utilizados por profesores universitarios de carreras de ingeniería, en tiempos de virtualidad en Barranquilla (Colombia). *Tecnura*, 26(72) 1-27. <https://doi.org/10.14483/22487638.18277>
- Padilla-Escorcía, I. (2022). Caracterización del conocimiento especializado del profesor en la modelación de las funciones trigonométricas en GeoGebra. *Encuentros*, 20(2), 23-39. <https://doi.org/10.15665/encuen.v20i02-Julio-dic.2850>
- Padilla-Escorcía, I., Acevedo-Rincón, J., y Montes-Navarro, M. (2023). Specialised Knowledge of Mathematics Teacher to Teach through Modelling using ICTS. *Acta Scientiae*, 25(1), 160-195. DOI: 10.17648/acta.scientiae.7363
- Padilla-Escorcía, I., y Conde-Carmona, R. (2020). Uso y formación en TIC en profesores de matemáticas: un análisis cualitativo. *Revista Virtual Católica del Norte*, 60, 116-136. <https://www.doi.org/10.35575/rvucn.n60a7>
- UNESCO. (2017). *E2030: Educación y Habilidades para el Siglo XXI*. Santiago de Chile. UNESCO.
- Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Madrid: Ediciones Morata, S.L
- Stake, R. (2010). *Qualitative research. Studying how things work*. The Guilford Press. New York - London

- Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research*, pp. 443 – 466.
- Stein, H., Gurevich, I. & Gorev, D. (2020). Integration of technology by novice mathematics teachers – what facilitates such integration and what makes it difficult? *Education and Information Technologies*, 25(1), 141-161. <https://doi.org/10.1007/s10639-019-09950-y>