Caracterización del conocimiento especializado del profesor en la modelación de las funciones trigonométricas en GeoGebra

REVISTA ENCUENTROS

Cómo citar este artículo:
Padilla-Escorcia Iván Andrés (2022). Caracterización del conocimiento especializado del profesor en la modelación de las funciones trigonométricas en GeoGebra. Universidad Autónoma del Caribe. Revista Encuentros, vol. 20-02 de julio-dic.
Doi : 10.15665/encuen.v20i02-Julio-dic..2850

Iván Andrés Padilla-Escorcia[1], Universidad del Atlántico, Colombia
iapadilla@mail.uniatlantico.edu.co; https://orcid.org/0000-0003-1210-3712

Recibido: 12 de noviembre de 2021 / Aceptado: 21 de abril de 2022

RESUMEN

Esta investigación tuvo como objetivo caracterizar el conocimiento especializado del profesor en la modelación de las funciones trigonométricas mediante el software GeoGebra. Para esto, con un enfoque cualitativo y con diseño estudio de caso instrumental se realizaron 13 unidades de observación no participantes, diario de campo, cuestionario y entrevista semiestructurada a un profesor con formación y experiencia en la enseñanza de las matemáticas mediadas por las TIC. Esta investigación se fundamentó en el modelo MTSK como referencial teórico, específicamente en los subdominios conocimiento de los temas y conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y sus respectivas categorías. Se encontró como principal hallazgo las relaciones que se dan entre las categorías de estos subdominios con respecto a que dentro del conocimiento especializado con el que debe contar el profesor que enseña matemáticas, está el conocimiento teórico a profundidad de los contenidos, para luego mediante herramienta, cuyo fin es la enseñanza, como es el caso de GeoGebra, aplicar estos contenidos de los que ya tiene conocimiento para desarrollar competencias matemáticas como la modelación.

Palabras clave: Profesor de matemáticas, modelación, GeoGebra, conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, funciones trigonométricas, TIC.

Characterization of specialised knowledge of the teacher in modeling trigonometric functions in GeoGebra

ABSTRACT

The objective of this research was to characterize the specialized knowledge of the teacher in the modeling of trigonometric functions using the GeoGebra software. For this, with a qualitative approach and with an instrumental case study design, 13 non-participating observation units, a field diary, a questionnaire and a semi-structured interview were carried out with a teacher with training and experience in teaching mathematics mediated by ICT. This research was based on the MTSK model as a theoretical reference,

1 Licenciado en Matemáticas – Universidad del Atlántico, Especialista en Estadística Aplicada – Universidad del Atlántico, Magíster en Educación – Universidad del Norte.

specifically in the subdomains knowledge of the subjects and knowledge of the teaching of mathematics and their respective categories. The main finding was the relationships that exist between the categories of these subdomains with respect to the fact that within the specialized knowledge that the teacher who teaches mathematics must have, there is the in-depth theoretical knowledge of the contents, and then by means of a tool, whose purpose is teaching, as is the case of GeoGebra, to apply these contents of which you already have knowledge to develop mathematical skills such as modeling.

Keywords: Mathematics teacher, modeling, GeoGebra, knowledge of mathematics teaching, trigonometric functions, ICT.

Caracterização do conhecimento especializado do professor na modelagem das funções trigonométricas em GeoGebra

RESUMO

Esta investigação tem como objetivo caracterizar o conhecimento especializado do professor no modelo de funções trigonométricas através do software GeoGebra. Para isso, com um enfoque cualitativo e com projeto de estudo de caso instrumental, realizando 13 unidades de observação sem participantes, diário de campo, sugestão e entrevista semi-estruturada com um professor com formação e experiência na instrução das matemáticas mediadas pelas TIC. Esta investigação é fundamentada no modelo MTSK como referencial teórico, especificamente nos subdomínios de conhecimento dos temas e conhecimento da interpretação das matemáticas e suas respectivas categorias. Se encontrar como hallazgo as relações que se dan entre as categorias principais de seus subdomínios com respeito a um conhecimento especializado com o que deve contar o professor que ensina matemática, está o conhecimento teórico de profundidade dos conteúdos, para luego mediante herramienta, cuyo fin es la enseñanza, como é o caso de GeoGebra, aplique os conteúdos de los que ya tiene conhecimento para desenvolver competências matemáticas como la modelación.

Palavras-chave: Professor de matemática, modelação, GeoGebra, conhecimento da interpretação das funções, funções trigonométricas, TIC.

1. Introducción

A lo largo de los años, distintos modelos que estudian el conocimiento del profesor de matemáticas han tomado relevancia dentro del contexto educativo. Shulman (1986) fue el pionero en estudiar a profundidad el conocimiento del profesor de manera general (áreas del conocimiento afines a la educación), con el objetivo de profesionalizar el rol del licenciado. Para esto, se formuló preguntas como: ¿El conocimiento de los contenidos y el conocimiento de la pedagogía general de los profesores están relacionados?, la cual sustentó afirmando que el conocimiento del profesor se basaba en 3 dominios de conocimiento que incluía el conocimiento del contenido de la materia o área del conocimiento de las ciencias sociales, naturales, matemáticas y/o humanidades; el conocimiento didáctico para la enseñanza de los contenidos y el conocimiento curricular de los contenidos que enseña.

En ese sentido, Fennema y Franke (1992), Ball et al. (2008) y Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) tomaron como referencia al modelo de Shulman (1986) e hicieron sus propios aportes desde la mirada de la educación matemática. En estos modelos destacaron categorías relacionadas con el conocimiento del profesor de las matemáticas como disciplina, así como el conocimiento didáctico-pedagógico para enseñar los contenidos de esta área del conocimiento. No obstante, el modelo de Ball et al. (2008) se interesó por estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que lo hiciera diferenciar de otro tipo de profesional con conocimiento de las matemáticas, por lo tanto, propusieron dos categorías de conocimiento: el conocimiento común de los contenidos, y el conocimiento especializado de los contenidos, cuyo aporte fue significativo para la constitución del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, con siglas en inglés MTSK.

En ese orden de ideas, es Carrillo et al. (2013) y luego, años más tarde por Carrillo et al. (2018) quienes proponen el modelo MTSK, cuya característica principal es que comprende el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, tanto de tipo matemático, como didáctico-pedagógico en uno solo, con propósitos exclusivos para la enseñanza del área. Sin embargo, pese a la inserción de este modelo como una nueva línea de investigación que estudia al profesor de matemática a profundidad, en latinoamericana, el modelo MTSK no ha tenido el mismo auge que en Europa. Apenas, en países como Brasil, Chile y México, se comenzó a divulgar en el año 2015 este modelo de caracterización del conocimiento del profesor. Por su parte, en el contexto colombiano, solo hasta 2020 se comenzó a estudiar acerca de este modelo como línea de investigación del desarrollo profesional docente (Padilla-Escorcia, 2020).

Lo anterior es preocupante si se tiene en cuenta que, en el proceso de selección docente de escuelas públicas en Colombia, cualquier profesional con formación en matemáticas, esto es: estadísticos, ingenieros, administradores, matemáticos, entre otros, pueden participar de ese proceso de selección, situación que validó el Ministerio de Educación Nacional, en el decreto 1278 (MEN, 2002). Sumado a esto, los resultados de las pruebas ICFES, que evalúan el desarrollo de competencias de los estudiantes de último grado de educación básica secundaria, evidencian que, en Colombia, el promedio en Matemáticas en el año 2017 fue de 51,57%, el cual es bajo, si se tiene en cuenta que supera escasamente la mitad de las preguntas que se evalúan en esta prueba estandarizada (ICFES, 2017). De igual manera, en los últimos resultados de los estudiantes colombianos en el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos, con siglas en inglés PISA, el desempeño en matemáticas fue de 391, solo un punto más que los resultados de 2015, pero aún distante del promedio de países de la OCDE (489), organización de la cual Colombia hace parte, y dónde se convirtió en el país con puntuación más baja de los países miembros (OCDE, 2019).

Ante esta situación, es una necesidad que sean los licenciados en matemáticas, con formación en currículo, didáctica, pedagogía y matemáticas, quienes puedan asumir e intentar cambiar esta realidad en el país, dado que, su formación no solamente es disciplinar, sino que, cuenta con el perfil que puede contribuir a que las matemáticas sean enseñadas de acuerdo a cada una de las necesidades y el contexto de las diversas regiones de Colombia. Además, del conocimiento para identificar los contenidos a fortalecer, potenciar y profundizar en cada nivel de escolaridad (Padilla-Escorcia & Acevedo-Rincón, 2020).

Por otra parte, la modelación es una de las competencias de las matemáticas que más requiere por parte del profesor, conocimiento disciplinar, y didáctico-pedagógico, esto pues, es una oportunidad de generar abstracción y aplicabilidad de situaciones del mundo real con fines educativos en los contenidos de las matemáticas que enseña el profesor (Villa-Ochoa et al., 2020; Villa-Ochoa., 2007; Villa-Ochoa & Ruiz, 2009; Blum et al., 2007; Villareal et al., 2018). Aparte, desde el año 1998 en el documento de Lineamientos Curriculares, se sugiere la modelación como competencia fundamental a desarrollar en el pensamiento matemático de los estudiantes (MEN, 1998).

Por tal motivo, Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Meza (2018), Granados-Ortiz y Padilla-Escorcia (2021) y Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón (2021) resaltan que con ayuda de la tecnología, puntualmente de herramientas o software especializados de la matemáticas como: GeoGebra, Geo TIC, Cabri, entre otros, resultaría interesante explorar procesos de modelación con fines de enseñanza, ya que la importancia que tiene la inserción de estas herramientas en estos procesos, contribuyen en la construcción de representaciones y objetos matemáticos, análisis de modelos matemáticos y gráficos de tipo algebraico, que fomentan a la participación constante de los estudiantes, además, generan interés y/o motivación para el aprendizaje de las matemáticas, debido al sentido y aplicabilidad que estos le encuentran a esta ciencia con diversas situaciones y problemáticas contextuales que son de su interés modelarlas utilizando la tecnología como mediadoras en el aprendizaje de las matemáticas.

En por eso, que a partir de la necesidad de que el profesor conozca a profundidad las matemáticas como disciplina y con orientación de enseñanza de las mismas, para el fomento de procesos de modelación matemática utilizando las TIC, y en vista de la formación con la que se espera cuente un licenciado en matemáticas, esta investigación tiene como pregunta de investigación la siguiente:

¿Cuáles son las características de conocimiento especializado del profesor que incorpora GeoGebra en la modelación de las funciones trigonométricas? Para esto el referencial teórico que se utiliza es el modelo MTSK, dada su versatilidad para estudiar el conocimiento matemático y didáctico-pedagógico del profesor que enseña matemáticas y que en este caso incluye elementos de la modelación y de las TIC.

Marco teórico

El modelo MTSK, es un modelo que estudia al profesor de matemáticas, a partir de dos dominios de conocimiento: el conocimiento matemático (MK) y el conocimiento didáctico-pedagógico del contenido (PCK). Este modelo se enfoca en describir el conocimiento profesional que requiere el profesor de matemáticas con formación de licenciado para comprender la naturaleza de las matemáticas con fines de enseñanza, por lo que, no contempla conocimientos generales del profesor acerca de la psicología o pedagogía, al considerarse estos conocimientos ya inmersos dentro de la profesión del licenciado en matemática (Montes & Carrillo, 2017; Aguilar-González, Muñoz-Catalán & Carrillo, 2019).

El MK, según Carrillo et al. (2018) y Advíncula et al. (2021) es el conocimiento estructurado de reglas matemáticas que tiene el profesor, y que le permiten comprender el origen de los procedimientos, el lenguaje matemático y la precisión que se requiere para desarrollar las matemáticas. Además, este conocimiento del profesor es superior al que se pretende desarrolle un estudiante en cualquier nivel de académico, no solamente, en cuanto a la cantidad de conocimiento de los contenidos, sino también, de las diversas aplicaciones y utilidades que tienen estos contenidos en la vida cotidiana. Este dominio se divide en 3 subdominios de conocimiento que son: KoT (conocimiento de los temas), KPM (conocimiento de las prácticas matemáticas) y KSM (conocimiento de las estructuras matemáticas).

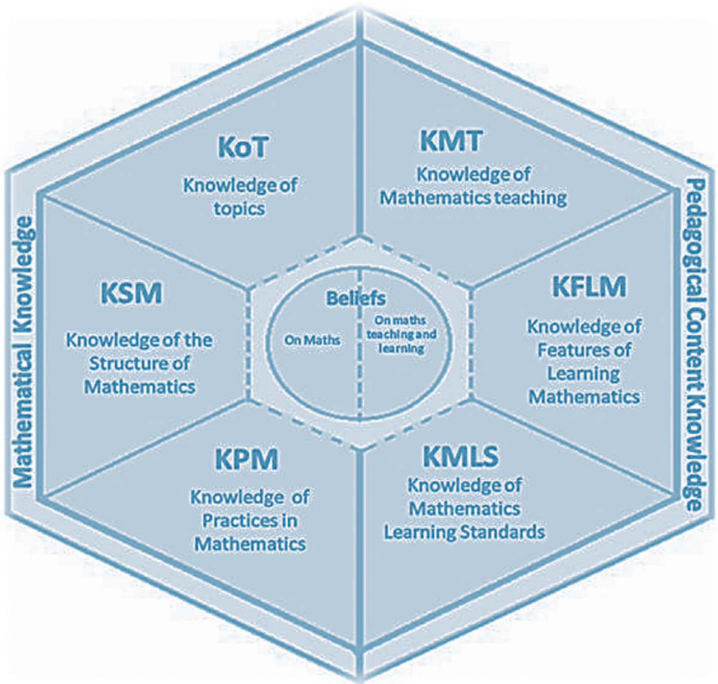
El PCK, es el conocimiento que tiene el profesor para profundizar los contenidos de las matemáticas en términos de enseñanza y aprendizaje, es decir, las habilidades que necesita el profesor en la enseñanza, y que están ligadas a la puesta en escena en el aula para la enseñanza de un contenido particular de las matemáticas (Carrillo et al., 2018; Escudero y Carrillo, 2020; Rojas, Flores-Medrano & Carrillo, 2015). Este dominio se divide en 3 subdominios que son: KFML (Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas), KMT (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas) y KMLS (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas).

A su vez, estos dominios de conocimiento, con sus respectivos subdominios, giran alrededor de las concepciones y creencias que tienen los profesores de las matemáticas acerca de la forma en cómo debe llevarse a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta área del saber, de acuerdo a su experiencia docente (Zakaryan & Ribeiro, 2019).

En ese orden la Figura 1 muestra el modelo que representa el conocimiento especializado del profesor de matemáticas desde una mirada matemática y didáctica-pedagógica.

Subdominios del modelo MTSK

Figura 1. Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas



Fuente:Carrillo et al. (2018).
Nota. La figura representa el modelo de conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas, con sus respectivos dominios y subdominios.

Dentro del dominio MK, se tiene el subdominio conocimiento de los temas (KoT), que corresponde al conocimiento de los componentes específicos de las matemáticas como: conceptos, hechos, reglas, teoremas y lemas, con los que cuenta el profesor para llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas (Escudero & Carrillo, 2020). Del KoT se desprenden 5 categorías de conocimiento que lo componen (Flores-Medrano et al., 2014). Estas son: conocimiento de las definiciones, registros de representación, propiedades, procedimientos y relaciones fenomenológicas.

El conocimiento de las estructuras de las matemáticas (KSM), es el conocimiento del profesor sobre las conexiones que existen entre los contenidos de las matemáticas, para luego relacionarlas entre sí, bien sea del curso que está impartiendo o con contenidos de niveles inferiores a este (Montes, 2015), estas relaciones pueden ser de tipo interconceptual, las cuales son ideas matemáticas que vinculan diferentes representaciones del mismo concepto o diferentes, e intraconceptuales que son relaciones entre contenidos de las matemáticas que tienen lugar en la proximidad de un único concepto (Martínez et al., 2011). Flores-Medrano *et al.* (2014) propone 4 categorías acerca del conocimiento del profesor de matemáticas para establecer conexiones en los contenidos que enseña. Estas son: las conexiones de complejización, simplificación, transversales y auxiliares.

El conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM), es el conocimiento del profesor acerca de la forma en cómo se construye el conocimiento matemático, es decir la jerarquización, planificación y procedimiento en la resolución de problemas matemáticos, la validación, demostración, papel del lenguaje y de símbolos en matemáticas, la modelación y las condiciones que son suficientes y necesarias para generar definiciones (Delgado & Zakaryan, 2019; Flores-Medrano et al., 2016), además, se considera dentro de este subdominio, el fomento que hace el profesor acerca del uso de la notación formal dentro de las matemáticas (Padilla–Escorcia & Acevedo-Rincón, 2020), a su vez, cabe destacar que las categorías de este subdominio no son exhaustivas y pueden variar de acuerdo a la revisión de la literatura que se haga, algunos investigadores han propuesto las siguientes: formas de proceder, modelar, definir, ejemplificar y notar en matemáticas (Alfaro, Flores & Valverde, 2020).

Por otro lado, dentro del PCK, se tiene el subdominio características de aprendizaje de las matemáticas (KFML), este es el conocimiento del profesor para identificar la interacción que tienen los estudiantes con cada uno de los contenidos de las matemáticas abordados en las clases, este incluye: las debilidades que tienen en el aprendizaje de los mismos a partir de interrogantes que se haga el profesor, por ejemplo ¿cómo aprende el estudiante?, los obstáculos que conllevan a que los estudiantes aprendan los contenidos de las matemáticas, el conocimiento de los intereses, gustos y motivaciones de los estudiantes con las matemáticas y el conocimiento de teorías del desarrollo cognitivo de los estudiantes que son construidas a partir de las experiencias del quehacer de la práctica pedagógica de los profesores o teorías que son institucionalizadas dentro de la Educación Matemática, por ejemplo, la teoría APOE (Carrillo et al., 2018).

El conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), es el conocimiento del profesor acerca de teorías institucionalizadas de la educación matemática que están enfocadas en la enseñanza del área, y que son derivadas de investigaciones o de las reflexiones que surgen a partir de su propia práctica, con el objetivo de crear estrategias a nivel pedagógico y didáctico que permitan la enseñanza de las matemáticas (Delgado & Zakaryan, 2019; Montes, 2015). En las categorías del KMT se tiene: el conocimiento del profesor acerca estrategias, técnicas, ejemplos y tareas para la enseñanza de los contenidos de las matemáticas, el conocimiento de recursos materiales y virtuales y la potencialidad que tienen estos recursos para la enseñanza de los contenidos de las matemáticas y el conocimiento de teorías en educación matemática que son apoyo en la enseñanza (Flores et al., 2014).

El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), es el conocimiento que tiene el profesor acerca del nivel de desarrollo cognitivo que se espera alcancen sus estudiantes, dependiendo del nivel académico en el que se encuentren, además, del conocimiento del profesor para saber el nivel de profundización con el que debe ser enfocado un contenido, teniendo en cuenta también estándares de aprendizaje que indican la organización de los contenidos de cada nivel académico, y las mediciones de pruebas nacionales e internacionales, como es el caso de en Colombia, las PRUEBAS SABER y en América Latina, las pruebas PISA (Muñoz-Catalán, Liñan & Ribeiro, 2017; Padilla-Escorcia, 2020).

2. Metodología

Esta investigación se lleva a cabo bajo un enfoque cualitativo (Stake, 2010), con un diseño estudio de caso de tipo instrumental (2005), debido a que a partir del estudio de una situación única se pretende comprender, interpretar, analizar y caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que enseña la modelación de las funciones trigonométricas utilizando el software especializado GeoGebra. Los criterios que se tuvieron en cuenta para la elección del caso se basaron en los propuestos por Simons (2011) con respecto a que de un conjunto total de casos, se selecciona un caso a criterio del investigador, que cumpla con los intereses de la investigación, en este caso con experiencia enseñando matemáticas mediante software matemáticos, para la modelación de funciones en el grado décimo de básica secundaria. Este, recibe el nombre de profesor durante esta investigación.

Las técnicas utilizadas para la recolección de la información son las siguientes: (i) un cuestionario aplicado al profesor, el cual tuvo como objetivo conocer acerca de la experiencia del profesor en la enseñanza de las matemáticas mediante la herramienta GeoGebra, además, para que tuviera acercamientos con el modelo de conocimiento especializado del profesor; (ii) 13 unidades de observación no participantes al profesor, 2 en la modalidad presencial y 11 en la modalidad virtual-remota, dada la contingencia ocasionada por el Covid-19. Se seleccionaron episodios de clase, en los cuales el profesor más profundizó acerca de la modelación de las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente; (iii) una entrevista semiestructurada al profesor, la cual tuvo como objetivo generar contrastes e interrogantes surgidos durante el proceso de observación y análisis del conocimiento especializado del profesor en los episodios de clase y el cuestionario previamente respondido por este; (iv) diario de campo de las unidades de información recolectadas.

El instrumento de análisis utilizado para el análisis de los datos en esta investigación, corresponde a una tabla de indicadores de conocimiento del profesor adaptados de Carrillo et al. (2018), que está enfocada en el conocimiento del profesor acerca de la modelación de las funciones trigonométricas en GeoGebra, vistos desde el KoT y KMT, subdominios que son de interés analizar en esta investigación con sus respectivas categorías, mediante un análisis de contenido a extractos de 3 episodios y de la entrevista semiestructurada al profesor. Este tipo de análisis permite organizar los datos en categorías, donde se hace revisión de las mismas hasta que se sature la información, de modo que no se puedan hacer más aportes a las categorías, ya que están completamente definidas (Krippedorff, 2009; Carter, 2020).

Las siguientes tablas, muestran los indicadores de conocimiento del profesor acerca de la modelación de las funciones trigonométricas utilizando GeoGebra con su dominio, subdominio, categoría y descripción del KoT y KMT respectivamente.

Tabla 1.

Dominio	Subdominio	Categoría	Descriptores
MK	KoT	CC1. Conocimiento de las definiciones	DC1. Saber las definiciones de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en la modelación de las mismas con GeoGebra.
		CC2. Conocimiento del tipo de fenomenología o aplicación en la vida cotidiana de los contenidos matemáticos	DC2. Reconocer situaciones de la vida cotidiana de matemáticas o áreas relacionadas que puedan ser modeladas mediante las funciones trigonométricas en GeoGebra.
		CC3. Conocimiento de los registros de representación de los contenidos	DC3. Representar las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en sus registros de representación
		CC4. Conocimiento de las propiedades y fundamentos de los contenidos	DC4. Aplicar las propiedades de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en la modelación de situaciones de la vida cotidiana con GeoGebra.
		CC5. Conocimiento de los procedimientos de contenidos de las matemáticas escolares	DC5. Aplicar los procedimientos de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en la modelación de situaciones matemáticas o de áreas relacionadas con GeoGebra.
		CC6. Conocimiento de las posibles relaciones fenomenológicas entre contenidos matemáticos	DC6. Reconocer relaciones fenomenológicas de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) que aportan en la modelación de situaciones de la vida cotidiana.

Nota: Esta tabla presenta los indicadores del subdominio KoT con sus respectivos descriptores. Es importante aclarar que la sigla CC, hace referencia a la categoría de conocimiento del contenido y que la sigla DC corresponde al descriptor del contenido, estos se enumeran con ese orden hasta el número 6.

Tabla 2.

Dominio	Subdominio	Categoría	Descriptores
MK	KoT	(CE1). Conocimiento de la potencialidad del recurso virtual y/o material en la enseñanza de los contenidos	(DE1). Saber la efectividad de herramientas TIC (GeoGebra y programas Microsoft) para realizar representaciones matemáticas de manera dinámica de las funciones trigonométricas.
		(CE2). Conocimiento de actividades, tareas, estrategias y ejemplos que contribuyan en la enseñanza de los contenidos matemáticos	(DE2). Conocer actividades, ejercicios, ejemplos y tareas a efectuar mediante la implementación de las TIC en la construcción de modelos matemáticos relacionados con las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente).
		(CE3). Conocimiento del tipo de ayudas a brindarles a los estudiantes que permitan cubrir sus necesidades en la enseñanza de los contenidos matemáticos	(DE3). Saber el tipo de ayudas a brindarles a los estudiantes cuando tengan dificultades para plasmar una situación real a través de la modelación matemática relacionada con las funciones trigonométricas.
		(CE4). Conocimiento del tipo de teorías institucionalizadas como soporte para realizar procesos de modelado matemático acerca de situaciones contextuales	(DE4). Saber de teorías en educación matemática y procesos pedagógicos como soportes para la enseñanza de la modelación matemática en situaciones de la vida cotidiana dónde se apliquen las funciones trigonométricas utilizando (Seno, coseno y tangente) con GeoGebra.

Nota: Esta tabla presenta los indicadores del subdominio KMT con sus respectivos descriptores. Es importante aclarar que la sigla CE, hace referencia a la categoría de conocimiento de la enseñanza este y que la sigla DE corresponde al descriptor de la enseñanza, estos se enumeran con ese orden hasta el número 4.

3. Resultados

El episodio que se presenta a continuación fue desarrollado en un ambiente escolar, bajo la modalidad presencial con estudiantes de décimo grado. Para términos de esta investigación el profesor objetivo de análisis se representará con el código P, y los estudiantes de acuerdo a sus intervenciones de esta forma (E1, E2,..., etc.)

En el episodio, el profesor da muestra de conocimiento de los temas, al proponerle a sus estudiantes, la modelación de las funciones trigonométricas seno y coseno en GeoGebra, para partir de estas gráficas, reconocer algunas de las propiedades que componen a las funciones mencionadas. Como es el caso del rango, el período y los puntos de intersección con los ejes del plano cartesiano. Por su parte, se evidencia conocimiento de la enseñanza de las matemáticas por parte del profesor, para mediante los comandos que ofrece el software especializado GeoGebra como recurso virtual para la enseñanza, sacar conclusiones del comportamiento de las gráficas, como se observa en el siguiente dialogo:

P ¿Están viendo la creación (en *GeoGebra*) de qué funciones?
E2 De las funciones seno y coseno

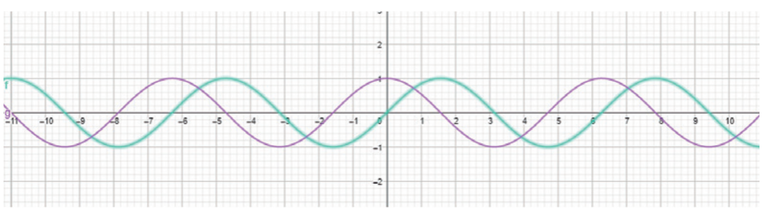


Figura 2. Gráfico de la función seno y coseno en *GeoGebra*

P Ahora, a partir de las gráficas, ¿Qué se puede identificar? ¿Qué ocurre si existe un valor que está por encima del uno y menos uno? [pausa] ¿Podremos saber ocurrirá respectivamente por arriba en el comportamiento de la función? [pausa] ¿Qué ocurrirá en el rango?
E2 El rango ya no será cero.
P Excelente, eso lo que quiere decir es que, el rango no va a estar definido en ese punto. Ni para la función seno, pero tampoco ¿para cuál?
Curso Para la función Coseno
P Bueno, ahora miremos que el comportamiento de las funciones sufre variaciones, sí por ejemplo, en el argumento de la función seno, no es x, si no más bien una constante distinta. Es decir, ahora en *GeoGebra* y hacemos eso [Pausa]. Bueno y si les preguntan qué estas dos funciones se intersecan. ¿Qué responden?
E1 Sí, las funciones se intersecan.
P Excelente E1, otra pregunta ¿las dos funciones son periódicas?
E2 Sí
P ¿Cuál es el período de cada función?
E2 De la función seno ¿No es de 2ϖ?
P De 0 a 2ϖ
E2 Sí
P ¿Y cuál es el período de la función coseno?
E2 Es igual al de la función seno, es decir de 0 a 2ϖ
P ¿Cuál es la única parte que cambia entre esas dos funciones?
E1 Que una empieza de abajo y la otra desde arriba
E2 ¿Te refieres a los puntos?
P Perfecto E2, lo que cambia son los puntos de corte
E2 Sí.
P Una función comienza desde el origen y la otro bajando desde 0.1

En este episodio el profesor les muestra a los estudiantes la modelación de las funciones ***sen x*** y ***cos x*** y en el software GeoGebra, las representa mediante un color a cada una de estas, y mediante interrogantes propone a que los estudiantes interpreten a partir del modelado de los gráficos, algunas propiedades de estas dos funciones. Se encontró, que el profesor muestra conocimiento de la categoría de Registros de representación del KoT, ya que este conoce que mediante la representación gráfica de estas funciones, los estudiantes pueden visualizar el comportamiento analítico de las mismas en el plano cartesiano, lo que a su vez guarda relación con su conocimiento acerca de la categoría de potencial del material virtual para la enseñanza, categoría del KMT, ya que el profesor sabe que mediante GeoGebra, no solamente puede graficar las funciones trigonométricas antes en mención, sino que, con cada uno de los comandos de este software, puede mostrar a sus estudiantes dinámicamente el movimiento de estas funciones, que difícilmente puede evidenciarse si las gráficas fueran realizadas utilizando material concreto como el tablero.

Del mismo modo, este sabe que utilizando colores que ofrece el mismo software, la función seno (color azul) y la función coseno (color morado), los estudiantes pueden tener una mayor visualización para el análisis de las propiedades de cada una de estas funciones. Así, los conocimientos que muestra el profesor están alineados con el indicador CC3 (Conocimiento de los registros de representación) de la Tabla 1 y el indicador CE1 (conocimiento de la potencialidad del recurso virtual y/o material en la enseñanza de los contenidos) de la Tabla 2, ya que para llevar a cabo el modelado de la funciones trigonométricas seno y coseno, y a su vez la identificación de sus propiedades a través del gráfico de estas, fue necesario que el profesor conociera que el registro gráfico, es la mejor forma de identificar las propiedades de estas funciones, y que GeoGebra, es un software matemático con potencial para llevar a cabo dichas representaciones que expresan el modelado de las funciones en el plano, dada su funcionalidad dinámica y de visualización.

Aparte, se encontró indicios de conocimiento especializado del profesor sobre la categoría de definiciones mediante las preguntas que éste formula, como: ¿Qué ocurre si existe un valor que está por encima del uno y menos uno? O ¿Podremos saber ocurrirá respectivamente por arriba en el comportamiento de la función? las cuales son muestra de que este sabe que el rango de una función es lo que determina los valores en los cuales está definida una función, por lo que propone el supuesto a sus estudiantes de que las funciones estudiadas, tomen valores por encima y por debajo de uno y menos uno, de manera que los estudiantes comprendan que esos puntos no están definidos en dichas funciones. Lo cual a su vez es índice de conocimiento del profesor acerca de las propiedades de las funciones trigonométricas (seno y coseno), puntualmente del rango, ya que sabe que estas dos funciones están definidas en el intervalo entre -1 y 1, lo que se confirma también, cuando este afirma que estas funciones tienen un comportamiento analítico, que está determinado por el valor que toman en su argumento, es decir que este sabe que el argumento de estas dos funciones es quién determina el rango de las funciones que son familia a la función seno y coseno, como es el caso de ***sen*** *(x+2)* o ***cos****(x+2)*.

Aparte, el profesor muestra conocimiento de la propiedad del período de la funciones, ya que cuándo le pregunta a sus estudiantes: ¿cuál es el periodo de cada función seno? un estudiante afirma que es 2π, ante esto el profesor corrige, y afirma que el período es de 0 a 2π, lo cual es correcto, ya que el período de las funciones está determinado por un punto inicial y un punto final que es reiterativo a partir de sus movimientos, y que es indicio de conocimiento del profesor acerca de las propiedades de los contenidos que enseña.

Ahora bien, es interesante, que el conocimiento del profesor de las propiedades de los contenidos que enseña, en este caso de las funciones trigonométricas (seno y coseno) se hace aún más explícito, cuando este formula la pregunta: ¿Cuál es la única parte que cambia entre esas dos funciones? la cual está inducida a que los estudiantes descubran que la única propiedad que varía en estas dos funciones son los puntos de intersección de cada una de estas, por ejemplo con respecto al eje *y*, la función seno en 0 y para la función coseno en 1. Lo cual es muestra de conocimiento del profesor acerca de las propiedades de las funciones trigonométricas, lo cual está alineado con el indicador CC4 (Conocimiento de las propiedades y fundamentos de los contenidos) de la Tabla 1, ya que fue necesario que el profesor conociera las propiedades de las funciones trigonométricas, para luego a partir de estas, sacar interpretaciones del comportamiento que tienen cada una de las modelaciones de estas funciones visualizadas en GeoGebra, así como diferencias y comparaciones entre ellas mismas.

Del mismo modo, se halla la relación entre los indicadores de conocimiento CC1 y CC4, puesto que para el profesor saber que propiedades cumplen las funciones trigonométricas antes mencionadas, como por ejemplo: el rango, período y puntos de intersección con los ejes, es necesario que el profesor conozca la definición de cada uno de los términos de las propiedades, lo que enmarca la versatilidad del MTSK para relacionar indicadores de conocimiento de dos subdominios distintos, pero pertenecientes a un dominio global de conocimiento, que en este caso es el MK.

Por otra parte, en la siguiente unidad de información se hace evidente indicios de conocimiento del profesor de las categorías de definiciones, propiedades y registros de representación del KoT y de las categorías del KMT: conocimiento de la potencialidad del recurso virtual y/o material en la enseñanza de los contenidos y conocimiento del tipo de ayudas que se brindan a los estudiantes en la enseñanza de las matemáticas, específicamente de la traslación de la función coseno en el plano cartesiano modelado mediante el software GeoGebra, además, es interesante las distintas relaciones que se encontraron entre categorías de distintos dominios de conocimiento del MTSK, cómo se cita a continuación:

P Ahora solo vamos a graficar dos funciones cosx y cosx+3, presten atención al modelado de esas dos funciones y díganme si esas dos gráficas son ¿seno o coseno?
E2 Son funciones coseno
P ¿Cómo sé que el modelado de esas dos gráficas pertenece a dos funciones coseno? [Pausa] por ejemplo, la moradita
E2 La moradita es función cosx
P ¿Y la amarillita? ¿Cuál función es esa?
E2 La amarilla es la función cosx+3
P Bien ¿Qué ocurrió con la función cosx+3, con respecto a la función cosx? ¿Qué pasó con la función coseno al sumarle 3 al argumento del ángulo?
E2 La función coseno se movió
E3 La función se movió y no pasa por el punto G
P ¿Se dice mover?
E4 Trasladó
P ¿Se trasladó?
E2 Sí
P ¿Cuántas unidades?
E2 Tres
P ¿Hacia dónde se trasladó tres unidades la función?
E2 La función coseno se trasladó 3 unidades desde la izquierda hacía atrás
E6 Estás equivocado, fue a la derecha
E2 No E6, la función se trasladó hacia la izquierda

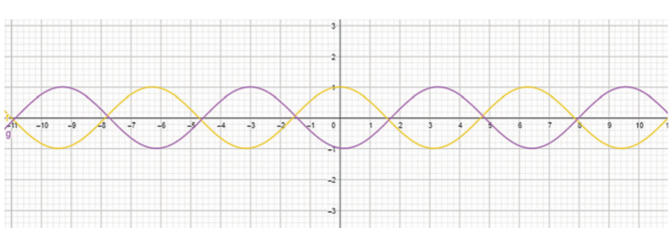


Figura 3. Gráfico de la función cos x y cos x +3 en GeoGebra

Este episodio de clase comienza con la propuesta del profesor a sus estudiantes, para que analicen dos gráficas modeladas mediante GeoGebra de la función coseno, y además, que establezcan diferencias entre las mismas con respecto a la cantidad de unidades que se trasladó una de estas dos funciones con respecto a la otra. Luego, formula preguntas que conducen a que los estudiantes interpreten el significado de traslación de la función coseno en su forma general, bien sea unidades hacia la derecha o izquierda del plano cartesiano, a partir de la suma o resta de una constante C afuera del paréntesis del argumento de la función coseno. Se encontró que el profesor muestra conocimiento acerca de la categoría de definiciones de la traslación de las funciones con forma $\cos x \pm n$, ya que, mediante el estudio de la función $\cos x + 3$, formula preguntas como: ¿Qué ocurrió con la función $\cos x + 3$ con respecto a la función $\cos x$? ¿Qué pasó con la función coseno al sumarle 3 al argumento del ángulo? Lo que se intuye hace, para que los estudiantes relacionen que a partir de la constante que acompaña al argumento de la función $\cos x$, existirán variaciones en su comportamiento, en este caso, 3 unidades hacia la izquierda de esta. Lo que a su vez está alineado con el DC1 de la Tabla 1, que afirma que el profesor de matemáticas debe saber las definiciones de las funciones trigonométricas en la modelación de estas con GeoGebra, en este caso la definición de la traslación de la función coseno, para luego modelarlas en el software como se observa en la Figura 3.

De la misma manera, se evidencia conocimiento del profesor de la categoría de registros de representación del KoT, específicamente del registro gráfico, ya que se intuye que el profesor propone el modelado gráfico de la función $\cos x$ y $\cos x + 3$, puesto que visualmente está mucho más al alcance de los estudiantes identificar el movimiento que sufre una función al aumentarle o disminuirle unidades en su argumento. Lo cual se alinea con el DC3 de la Tabla 1, que afirma que el profesor debe saber representar las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en sus registros de representación, y que en este episodio se muestra con el conocimiento del profesor para gráficamente plasmar la función $\cos x$ y la traslación de estas 3 unidades hacia la izquierda.

Ahora, es interesante, que este indicador va en concordancia con el DE1 (saber la efectividad de herramientas TIC) para realizar representaciones matemáticas de manera dinámica de las funciones trigonométricas de la Tabla 2 de indicadores del KMT, ya que es claro que el profesor sabe que mediante el potencial que le ofrece GeoGebra puede no solamente modelar gráficamente a la función coseno y su traslación, sino, realizar un mayor análisis a lo que ocurre en la traslación de la función a través del comportamiento de la gráfica, y que el profesor bien aprovecha dando colores, otro recurso que le ofrece el software a cada una de estas funciones para a partir de esto los estudiantes interpreten mediante la visualización de las gráficas el concepto de traslación de la función trigonométrica coseno.

Esta situación muestra de nuevo la versatilidad del modelo MTSK para relacionar dos subdominios de dominios distintos, y los cuales hacen parte del conocimiento especializado del profesor, tanto matemático, como didáctico-pedagógico de manera conjunta, ya que para el profesor poder representar gráficamente el modelado de las funciones trigonométricas en GeoGebra, debe saber antes lo que le ofrece este software y los distintos comandos que hacen que el modelado de las funciones sea de tipo dinámico y visualmente ofrezca un mayor análisis que si se hiciera de manera manual.

Así mismo, es interesante la conexión que existe entre los indicadores del KoT, CC1 (conocimiento de las definiciones) y CC4 (conocimiento de las propiedades y fundamentos de los contenidos) de la Tabla 1, con el indicador del KMT CE4 (conocimiento de la potencialidad del recurso virtual y/o material en la enseñanza de los contenidos) de la Tabla 2, ya que se evidenció que fue necesario que el profesor conociera la definición de traslación de una función de forma genérica, para luego ser más específico en el análisis de la traslación de la función coseno y de las distintas formas que puede tomar el argumento de la función y modelar así, la función $\cos x + 3$ en GeoGebra, lo que evidencia la relación que existe del conocimiento especializado del profesor tanto matemático como didáctico pedagógico en la enseñanza.

Por otra parte, en este episodio se observa un acercamiento de conocimiento del profesor con el indicador CE3: conocimiento del tipo de ayudas a brindarles a los estudiantes que permitan cubrir sus necesidades en la enseñanza de los contenidos matemáticos de la Tabla 2, esto pues, interviene y corrige a uno de sus estudiantes acerca de que lo que está ocurriendo en el comportamiento de la función coseno en el plano, es una traslación y no un movimiento, ya que a pesar que son palabras semejantes, en términos matemáticos es más correcto utilizar traslación, dado que implica la cantidad de unidades que se desplazó la función a una determinada posición; a su vez guarda relación con el conocimiento del registro verbal que tiene el profesor (KoT) acerca de este contenido que enseña y que del mismo modo es un acercamiento a una de las categorías de las prácticas matemáticas (KPM) que hace alusión al fomento del profesor para utilizar las matemáticas en su lenguaje formal.

Por otro lado, en la siguiente unidad de información del profesor hace estudio del modelado de la función tangente y de sus propiedades en GeoGebra, como se cita a continuación:

P Bueno estudiantes, ¿Qué sabemos de la función tangente? ¿Cuál es su dominio?
P ¿la recuerdan? Realicemos la gráfica de la tangente en GeoGebra

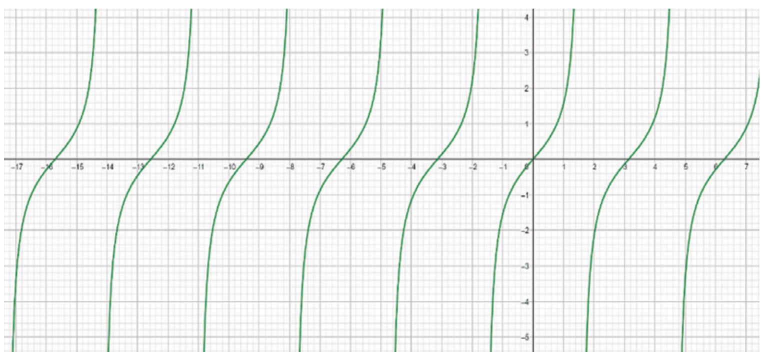


Figura 4. Gráfico de la función tangente en GeoGebra

P De acuerdo con la gráfica ¿De cuánto es el período de la función tangente?
Grupo El período de la tangente es cada π
P Excelente, ahora que identificaron que el periodo de la función tangente es cada π, la idea es que ahora miremos ¿cuál es el dominio de esa función? [pausa] recuerden que para encontrarlo tienen que analizar dónde se indetermina la función, para poder calcular esos valores [pausa] ¿qué valores no puede tomar la tangente? Analicen la gráfica, ¿en dónde se forman las asíntotas de la función?
E8 En dos
P ¿Segura que es en dos?
E8 No, en dos no, me equivoqué
E8 Profe, creo que son los números que no están definidos para ϖ, creo que son los múltiplos de $\varpi/2$
P ¿Segura?
E8 La verdad no, por eso estoy preguntando
P ¿Cuál es el dominio entonces?
E8 Son todos los números reales y también los múltiplos de π
P Excepto donde se armen las asíntotas
E2 A excepción de los múltiplos de $\pi/2$
P ¿Segura?
E2 Por supuesto
P Pero debes recordar que si tienes la siguiente expresión $n\pi/2$, el valor de n puede ser tanto par como impar, ¿recuerdas
eso? [pausa] ¿qué significa n?
E2 Número natural

P Y este número natural puede ser par o impar [pausa] por eso les pregunto ¿la función puede tomar cualquier valor natural?
E2 No, no puede tomar los números impares, porque no son de la forma: $\pi, 2\pi, 4\pi, 6\pi$
P La idea no es que yo se los diga, sino que lo descubran, creen una asíntota en GeoGebra
E2 ¿Y cómo se crea una asíntota en GeoGebra?
P En el comando que dice línea recta
P ¿Ya la hiciste?
E4 ¿Dónde debemos colocar la asíntota?
E2 La verdad no lo sé
E4 Creo que sería en el dos
P Bueno ¿ya la pudiste hacer?
E8 Sí

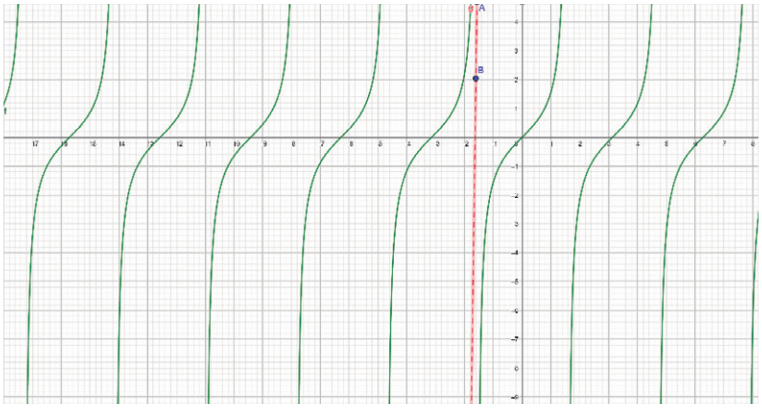


Figura 5. Gráfico de una asíntota vertical (rojo) a la función tangente en GeoGebra

Este episodio comienza con interrogantes que efectúa el profesor acerca de propiedades de la función tangente como el dominio y período. De este modo, les plantea a los estudiantes que utilicen GeoGebra para el modelado de la función y que visualmente reconozcan las propiedades antes en mención. No obstante, dado que los estudiantes no recuerdan la definición de estas propiedades de la función de manera teórica ni analíticamente en el software, el profesor plantea preguntas como: ¿Qué valores no puede tomar la tangente? ¿En dónde se forman las asíntotas de la función? y que están enfocadas en que los estudiantes construyan relaciones entre el concepto de dominio de la función tangente con los valores en los cuales se indetermina esta, ante esto, propone que construyan asíntotas a la función ***tan x*** como estrategia de verificación de la teoría con la práctica, con respecto a que el dominio de la función son todos los números reales a excepción de los valores en dónde se arman las asíntotas verticales.

En ese sentido, se evidencia conocimiento del profesor acerca de la categoría de *definiciones* (KoT), al formular preguntas como: ¿Qué sabemos de la función tangente? Que se percibe realiza, para que los estudiantes reconozcan las características de la función tangente, y sus propiedades, las cuales contribuyen en la comprensión de la gráfica de la función y que verifica a través de preguntas inductivas como: ¿De cuánto es el período de la función tangente? Basado en el modelado de la gráfica que este propone realicen en GeoGebra que se observa en la Figura 4, y que se considera efectiva, ya que es el grupo de estudiantes, quienes afirman que el período de esta función es de π. Lo cual está alineado con el DC1: "Saber las definiciones de las funciones trigonométricas (tangente) en la modelación de las mismas con GeoGebra".

Ahora, es interesante la conexión que se da entre los descriptores DC1 y DC3 de la Tabla 1, ya que saber representar las funciones trigonométricas en cada uno de sus registros de representación hace parte del conocimiento especializado del profesor, y en este episodio se evidencia que el profesor sabe que a través del registro gráfico de la función tangente es posible aplicar la definición de período de la función mediante la visualización en GeoGebra. Por otra parte, el profesor sabe que, para definir el dominio de la función tangente de manera práctica, debe plasmar asíntotas verticales a la función, como se ilustra en la Figura 4 y que relaciona los conocimientos del profesor de las categorías de representación y definiciones del subdominio KoT.

Así mismo, se evidencia conocimiento del profesor de la categoría potencialidad del recurso virtual y/o material en la enseñanza de los contenidos (KMT), específicamente del software GeoGebra, puesto que mediante la visualización gráfica de la función tangente y de una asíntota vertical a esta función, modela lo que ya los estudiantes conocen de forma teórica acerca de las propiedades de la función tangente como el dominio y período. Esto guarda relación con el DE1 de la Tabla 1: "Saber la efectividad de herramientas TIC (GeoGebra y programas Microsoft) para realizar representaciones matemáticas de manera dinámica de las funciones trigonométricas" de esta manera, se hace relevante la conexión que existe entre los indicadores CC1, CC2 y CE2, del KoT y KMT respectivamente, ya que para poder graficar el dominio y período de la función tangente, es necesario que el profesor conozca el potencial que le ofrece los comandos de GeoGebra como herramienta potencial en el modelado de estas funciones en el plano y que es evidencia de la conexión directa en este episodio del MK y PCK del profesor en la enseñanza de las funciones trigonométricas (tangente) de manera efectiva al utilizar las TIC.

4. Discusión

En esta investigación se encontró que el mayor indicio de conocimiento del profesor radica en el conocimiento de las categorías de definiciones, propiedades y registros de representación del KoT, presentes en cada uno de los abstractos analizados. Así mismo, la categoría de Potencialidad del recurso material o virtual para la enseñanza de los contenidos de matemáticas. Además, acercamientos de conocimiento del profesor sobre el tipo de ayudas a brindar a los estudiantes que permitan fortalecer sus dificultades en la enseñanza de las matemáticas.

Ahora bien, son interesantes las relaciones que se presentaron entre indicadores de conocimiento del mismo subdominio y de otro subdominio perteneciente a otro dominio de conocimiento, como es el caso del CC1: conocimiento de las definiciones, CC3: conocimiento de los registros de representación de los contenidos y CC4: Conocimiento de las propiedades y fundamentos de los contenidos, del subdominio KoT y el indicador CE1: conocimiento de la potencialidad del recurso virtual y/o material en la enseñanza de los contenidos del subdominio KMT, evidentes cuando el profesor muestra conocimiento de la definición de rango con respecto a que son los valores en los cuáles no está determinado una función en general, y lo aplica en la propiedad del rango de la función coseno cuando afirma que esta solo está definida con valores entre menos uno y uno, cuyo análisis lo muestra a través del registro de representación gráfico que plantea mediante el modelado del software GeoGebra, el cual sabe que dado su potencial permite una mejor visualización que si la gráfica se modelara de manera manual, dado que este es una de las mejores opciones que ofrece el software, y que está alineado con lo afirmado por el profesor en el cuestionario inicial que respondió antes de las unidades de información, donde dijo lo siguiente: *"Utilizo GeoGebra en mi práctica docente, ya que es una herramienta que se puede utilizar casi que en todas las ramas de las matemáticas, como lo es la trigonométrica, ya que permite de forma didáctica y dinámica, visualizar la abstracción de este contenido de las matemáticas"*, lo que confirma el conocimiento del profesor acerca de este recurso virtual como estrategia para enseñar contenidos de las matemáticas que requieren una mejor dinamización para su comprensión o también en la relación que se da entre el conocimiento que tiene el profesor acerca de la definición de traslación de las función coseno. Para luego, mediante el software GeoGebra utilizar el registro de representación gráfico, para hacer comparaciones entre la función $\cos x$ y $\cos x + 3$, dónde también este sabe que el software permite la visualización de más de dos funciones, con distintos colores y que a su vez permite un mejor análisis en el comportamiento de las 3 unidades que se mueve a la izquierda la función ***cos x***.

Lo anterior, enmarca la amplitud del modelo MTSK para relacionar distintas categorías de conocimiento que tienen su esencia dentro de la propia disciplina con categorías de tipo didáctico-pedagógico que permiten caracterizar el conocimiento especializado del profesor al contar con elementos de ambos dominios que lo hacen diferenciar de otro tipo de profesional que sabe de matemáticas solamente como disciplina, sin fines didáctico-pedagógicos.

Sin embargo, hubiese sido interesante que el profesor centrara su atención en situaciones donde aplicara las funciones trigonométricas en el modelado de situaciones del diario vivir, y que según Villa-Ochoa (2007) y Molina-Toro, Rendón-Meza & Villa-Ochoa (2018) las TIC (GeoGebra) ofrecen un alto número de posibilidades para que estos procesos puedan desarrollarse de una manera más efectiva, visto desde que ofrecen una mejor interpretación, análisis y conceptualización a los estudiantes, lo cual está relacionado con el DC2 (Reconocer situaciones de la vida cotidiana de matemáticas o áreas relacionadas que puedan ser modeladas mediante las funciones trigonométricas en GeoGebra) de la Tabla 1, del cual se considera existe un acercamiento de conocimiento del profesor, ya que en la entrevista semiestructurada formulada al profesor, posterior a las unidades de información, se le preguntó: ¿Conoce de relaciones fenomenológicas de tipo contextual en la enseñanza de las funciones trigonométricas?, con el objetivo de explorar del conocimiento de estas relaciones fenomenológicas por parte del profesor, a pesar que no fueron evidenciadas en las unidades de observación, ante esto afirmó que las funciones trigonométricas pueden encontrarse en el entorno, como es el caso de la representación de las células, las cuales toman el modelado de este tipo de funciones, así mismo aseguró que estas funciones pueden ser utilizadas en la arquitectura cuando se van a realizar construcciones, y que mediante las funciones trigonométricas se pueden hacer las maquetas que evidencien las escalas que se utilizarán en las construcciones.

5. Conclusiones

En este estudio se encontró diversas relaciones entre los subdominios KoT y KMT del MTSK en la modelación de las funciones trigonométricas utilizando el software especializado de las matemáticas GeoGebra, específicamente de las categorías de definiciones y registros de representación con la categoría potencialidad de los recursos materiales y/o virtuales, lo que es muestra de que es necesario que el profesor que enseña esta área del conocimiento tenga conocimiento de manera profunda, robusta y teórica cada uno de los contenidos de las matemáticas que enseña, para luego, poder visualizarlos, analizarlos e interpretarlos de manera efectiva utilizando GeoGebra como herramienta potencial para plasmar modelación matemática, bien sea de contenidos matemáticos, así como de situaciones contextuales en dónde se utilicen las matemáticas.

Ahora bien, como oportunidad de trabajo de acuerdo con los datos obtenidos en esta investigación, es interesante explorar como una futura línea de investigación acerca de los subdominios del KoT y KPM del dominio MK, y los subdominios KFML y KMLS del dominio PCK y caracterizar si dentro del conocimiento especializado del profesor para modelar las funciones trigonométricas utilizando GeoGebra, se dan relaciones también entre subdominios de un mismo dominio de conocimiento, y que contribuyan a la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas para enseñar este contenido de las matemáticas.

Apoyos

A Min Ciencias, porque gracias a la convocatoria 809 de la formación del capital humano en el Atlántico-Colombia de 2018.

Referencias

Advíncula, E., Beteta, M., León, C., Torres, I., & Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para su investigación. Revista Uniciencia, 35(1), 1-21. DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.12

Aguilar-González., Muñoz-Catalán., & Carrillo, J. (2019). An Example of Connections between the Mathematics Teacher's Conceptions and Specialised Knowledge. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15(2), 1-15. https://doi.org/10.29333/ejmste/101598

Alfaro, C., Flores, P., & Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. PNA, 14(2), 85-117. https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.9363

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (2007). Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New ICMI Study Series Volume 10

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M., & Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education,* 236-253. DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.,& Muñoz, M. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics. *In Proceedings of the CERME* (Vol 8, pp. 2985-2994)

Carter, S. (2020). Case Study Method and Research Design: Flexibility or Availability for the Novice Researcher? En H. van Rensburg & S. O'Neil (Eds.), Inclusive Theory and Practice in Special Education (pp. 301-326). Hershey, Pennsylvanie: IGI-Global. 10.4018/978-1-7998-2901-0.ch015.

Delgado, R., & Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-21. DOI: 10.1007/s10763-019-09977-0

Escudero-Ávila, D., & Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática*, *32*(2), 1-38.DOI: 10.24844/EM3202.01

Fennema, E., & Franke, L. (1992). Teacher´s Knowledge and its impact. In. D.A. Grows (Ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 147 – 164

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. *Publisher Universidad de Huelva Publicaciones*, 57 -72

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz, M., & Liñan, M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemáticos. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *30*(54), 204 -221. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10.

Granados-Ortiz, C., & Padilla-Escorcia, I. (2021). El aprendizaje gráfico de la recta tangente a través de la modelación de las secciones cónicas utilizando GeoGebra. Revista Científica, 40(1), 118-132. https://doi.org/10.14483/23448350.16137

ICFES (2017). *Balance. Así les fue a los estudiantes del país en la prueba saber 11°.* Bogotá: ICFES

Krippendorf, K. (2013). *Content Analysis: an introduction to its methodology*. Thousand Oaks: Sage.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, & M. Palarea (Eds.). Investigación en Educación Matemática XV (pp. 429-438). Ciudad Real: SEIEM.

MEN. (2002). Decreto 1278. Bogotá: MEN

MEN. (1998). Lineamientos curriculares: Matemáticas. Bogotá: MEN

Molina-Toro, J., Rendón-Mesa, P., & Villa-Ochoa, J. (2019). Research Trends in Digital Technologies and Modelling in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(8), 1-13. https://doi.org/10.29333/ejmste/108438

Montes, M. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso. Universidad de Huelva – Departamento de Didáctica de las Ciencias y la Filosofía. Huelva

Montes, M., & Carrillo, J. (2017). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Revista Bolema, 31(57), 114-134. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a06

Muñoz-Catalán, M., Liñan, M., & Ribeiro, M. (2017). Conocimiento especializado para enseñar la operación resta en educación infantil. Cadernos de Pesquisa, 24, 4-19. http://dx.doi.org/10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19

OCDE (2019). *Estrategias de Competencia de la OCDE 2019. Competencias para construir un futuro mejor.* Ed. 21 Fundación Santillana: OCDE

Padilla-Escorcia, I., & Acevedo-Rincón, J. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC. Eco Matemático, 12(1), 93-106. DOI 10.22463/17948231.3072

Padilla-Escorcia, I., & Acevedo – Rincón, J. (2020). El Conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas: Mediaciones con TIC para las funciones trigonométricas. Série Educar Matemática, Vol. 43, 109-118. DOI: 10.36 229/978-65-86127-63-8

Padilla-Escorcia, I. (2020). Una caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para el uso efectivo de las TIC en la enseñanza. Tesis de Maestría en Educación de la Universidad del Norte-Colombia

Rojas, N; Flores-Medrano, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *29*(51), 143-167. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teacher´s Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *American Educational Research Association*, 4-14

Simons, H. (2011). El estudio de caso: Teoría y práctica. Madrid: Ediciones Morata, S.L

Stake, R. (2010). Qualitative research. Studying how things work. The Gilford Press. New York – London

Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), The Sage handbook of qualitative research, 443 – 466.

Villa- Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. Tecno-Lógicas, 19, 63-85. https://doi.org/10.22430/22565337.505

Villa-Ochoa, J., & Ruíz, H. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 27, 1-21.

Villa-Ochoa, J., González, D., & Carmona, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. Formación Universitaria, 11(2), 25 -34. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Villa-Ochoa, J., Sánchez-Cardona, J., & Rendón-Meza, P. (2020). Evaluación formativa del conocimiento de los futuros profesores sobre modelación matemática. 5to Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática

Villarreal, M. E., Esteley, C. B., & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. ZDM - Mathematics Education, 50(1–2), 327–341. https://doi.org/10.1007/s11858-018- 0925-5

Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2019). Mathematics teacher's specialized knowledge: a secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education,* 25-42. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1525422