

La historia legislativa y curricular del curso de Geometría Analítica de la educación media de Colombia¹



Cómo citar el artículo

Aroca-Araújo Armando (2024) La historia legislativa y curricular del curso de Geometría Analítica de la educación media de Colombia. Revista Encuentros, Vol. 22 de enero-junio. Universidad Autónoma del Caribe.
Dois: 10.15665/encuen.v22i01-Enero-Junio-.2779

Armando Aroca-Araújo²
Universidad del Atlántico
armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co
<https://orcid.org/0000-0003-2786-4848>

Recibido: 28 de noviembre de 2021 / Aceptado: 6 de noviembre de 2023

Resumen

La asignatura de Geometría Analítica de la educación media colombiana no tiene su historia escrita, a pesar de tener una excepcional importancia en el desarrollo del pensamiento tiempo-espacial y de los sistemas métricos, pues en este curso se estudian actividades relacionadas con el análisis de distancias entre puntos, movimientos de proyectiles, sistemas de navegación, temas actuales de georreferencia, localización satelital, GPS, entre otros temas que potencialmente implican relaciones del tiempo con el espacio que en los cursos precedentes de la formación escolar no se trabaja. Se pretende mostrar la historia legislativa y curricular de este curso, en el sentido de mostrar o analizar el contexto internacional que dio su origen, así como los diferentes decretos, resoluciones y soportes teóricos que se pudieron encontrar y que poco a poco le fueron dando forma a lo que hoy se conoce como Geometría Analítica de grado 10°.

Palabras clave: Geometría Analítica, educación media, decretos, reformas educativas.

The legislative and curricular history of the Analytical Geometry course in secondary education in Colombia

Abstract

The Analytical Geometry subject of Colombian high school does not have a written history, despite having exceptional importance in the development of time-space thinking and metric systems, since in this course activities related to the analysis of distances are studied between points, projectile movements, naviga-

¹ Este artículo es producto de la tesis doctoral titulada: Formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor en clase de Geometría Analítica de grado 10° desarrollada en el Doctorado Interinstitucional de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

² Doctor en Educación énfasis educación matemática – Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Profesor Asociado Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Líder Grupo de Investigación Horizontes en Educación Matemática.

tion systems, current issues of georeference, satellite location, GPS, among other issues that potentially involve time-space relationships that were not worked on in the preceding courses of school training. It is intended to show the legislative and curricular history of this course, in the sense of showing or analyzing the international context that gave its origin, as well as the different decrees, resolutions and theoretical supports that could be found and that little by little were giving shape to what nowadays is known as 10^o Analytical Geometry.

Keywords: Analytical Geometry, secondary education, decrees, educational reforms.

A história legislativa e curricular do curso de Geometria Analítica no ensino médio na Colômbia

Resumo

A disciplina de Geometria Analítica do ensino médio colombiana não tem uma história escrita, apesar de ter uma importância excepcional no desenvolvimento do pensamento espaço-tempo e dos sistemas métricos, já que neste curso são estudadas atividades relacionadas com a análise de distâncias entre pontos, movimentos de projéteis, sistemas de navegação, questões atuais de georreferenciamento, localização de satélites, GPS, entre outras questões que potencialmente envolvem relações tempo-espaço que não foram trabalhadas nos cursos de formação escolar anteriores. Pretende-se mostrar a história legislativa e curricular deste curso, no sentido de mostrar ou analisar o contexto internacional que lhe deu origem, bem como os diferentes decretos, resoluções e suportes teóricos que se encontraram e que aos poucos o foram. dando forma a ela, o que hoje é conhecido como 10^o Geometria Analítica.

Palavras-chave: Geometria Analítica, ensino médio, decretos, reformas educacionais.

Introducción

En Aroca (2019) se hizo un primer intento de analizar la enseñanza de la Geometría Analítica en la educación media en Colombia, cuyo problema de investigación fue comprender el porqué de la enseñanza de un conjunto de temas han caracterizado un curso de Geometría Analítica de grado 10, durante más de 60 años. En este primer avance de investigación no había sido posible encontrar algunos documentos históricos que tuvieron impacto en lo que hoy se ha constituido dicho curso en Colombia. Gracias a la colaboración de varios colegas, entre ellos el profesor Carlos Vasco, fue posible conseguir documentos como:

- El Programa de Matemáticas para Bachillerato del Ministerio de Educación Nacional, MEN (1952), que expide mediante la resolución 349 de 1952, cuyo contenido para el grado Quinto de Bachillerato, llamado así para ese entonces.
- Programas de Matemáticas de lo que hoy se denomina sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo y undécimo. Así, el 4 de febrero de 1975, mediante la resolución 277, el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1975), adaptó dichos programas, entre ellos el Curso V denominado Geometría Analítica y Trigonometría.
- El 5 de junio de 1996 el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1996), expidió la resolución número 2343 con el “cual se adopta un diseño de lineamientos generales de los procesos curriculares del servicio público educativo, y se establecen los indicadores de logros curriculares para la educación formal”.

2. Metodología

Con el ánimo de tener una aproximación de la constitución de lo que es hoy día el curso de Geometría Analítica en la educación media colombiana, nos dimos a la tarea de hacer una revisión de literatura de corte histórico en el contexto internacional y nacional, haciendo énfasis en la construcción de referentes legislativos y curriculares en Colombia. Esta revisión es la que se presenta a continuación. Ya se había planteado que según Jones & Tzekaki (2016), hay muy poca investigación sobre los aspectos relacionados con la enseñanza de la Geometría Analítica, tanto en su didáctica como en la historia de su didáctica, en los distintos niveles de la educación, (Aroca, 2019, p.2). Además de ello, debe sumarse que muchos de los documentos claves en el desarrollo legislativo y curricular, no solo del curso de Geometría Analítica, sino en general de los Programa Matemáticas, no fueron digitalizados y si fue así no existe un repositorio donde se pueda ir acumulando esta información. Pensábamos que en el Ministerio de Educación Nacional de Colombia debería estar alojado este repositorio, pero fue sorpresa para nosotros cuando en el 2019 los consultamos y nos dimos cuenta de que la revisión literaria que habíamos hecho superaba el repositorio que ellos tenían. Metodológicamente implicó entonces hacer consultas a expertos nacionales o investigadores reconocidos que aportaron datos valiosos para en la construcción histórica de los referentes legislativos o normativos sobre la enseñanza de la geometría analítica del grado 10 de la educación colombiana.

3. Resultados

Partimos entonces de ese primer intento hecho en *Ibid* (2019), para mostrar más resultados producto de una investigación de tipo histórico y de revisión documental. En esta primera versión se hizo una revisión de la literatura de corte histórico en el contexto internacional que le da el ambiente de creación al curso de Geometría Analítica, remitimos a este artículo para mayor conocimiento sobre este tema. A ese contexto histórico del curso de Geometría Analítica de la educación media queremos agregar algunos datos:

Para la década del 70, como lo advierte Gascón (2001), había una controversia del tipo de geometría que debería estar presente en la formación matemática básica de todo ciudadano, discusión que parece retomarse en Colombia con la aparición de los Derechos Básicos de Aprendizaje, DBA, que más adelante se describirán. Así, plantea Gascón (*ibid.*), que:

...la discusión se polarizó entre los partidarios de una geometría sintética, propia del modelo “euclidiano”, basada en una axiomática más o menos explícita, y los partidarios de una geometría analítica, propia del modelo “cartesiano”, cuya práctica se sustenta en las técnicas del álgebra lineal y cuya axiomática suele quedar más implícita. (p.2)

En el caso de la geometría en la secundaria, Santaló (1980) manifestó la urgencia de desarrollar nuevos currículos, a partir de las capacidades de aprendizaje de los alumnos. Desde la década del 60, con los programas curriculares elaborados con los objetivos de Bloom o también llamado Taxonomía de Bloom, Bloom y Krathwohl (1956), los cuales se graduaban para cada edad en casi todos los países latinoamericanos. En Colombia, para el año 1984, el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1984), publicó los marcos generales de los programas curriculares y el Capítulo VI fue dedicado a geometría y medición para la educación secundaria. En parte de la Introducción de este capítulo se planteó lo siguiente:

Lo más importante de la geometría para la Secundaria es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación y las maneras de representar objetos sólidos ubicados en ese espacio.

Continuado con este propósito a través de esta unidad, los alumnos lograrán plasmar el espacio en modelos tridimensionales y en dibujos bidimensionales, habilitados así para expresar su creatividad y ejercitar su imaginación. (p. 199)

Destacamos de esta introducción la importancia que resalta el MEN sobre la exploración del espacio tridimensional en la realidad externa, es decir, en la vida cotidiana de los alumnos y profesores. También destacamos el reconocimiento de “modelos tridimensionales” y “dibujos bidimensionales” pues de manera implícita se muestra una relación del paso de 3D a 2D en las actividades matemáticas a realizar.

Los objetivos generales que se plantearon en este capítulo para Geometría y Medición fueron los siguientes:

- Efectuar representaciones planas de sólidos a través de axometrías, perspectiva cónica y vistas múltiples.
- Ejercitar la imaginación tridimensional mediante cortes imaginarios de sólidos y sus representaciones gráficas.
- Reconocer que las representaciones gráficas tienen una serie de convenciones que nos permiten representar los objetos de la manera más próxima a la realidad, e interpretar correctamente dichas convenciones.
- Visualizar el paso de R_3 a R_2 y viceversa a través de proyecciones paralelas y de proyecciones puntuales.
- Encontrar procedimientos para calcular el área lateral, el área total y el volumen de algunos sólidos geométricos.
- Emplear unidades de volumen y de capacidad en diferentes sistemas y convertirlas de unos a otros.
- Estimar los valores aproximados de área, volúmenes y capacidades en las unidades del sistema métrico decimal y en otros utilizados localmente. (p. 199)

Hoy día en Colombia, la enseñanza de la Geometría Analítica en la educación media adolece de los cuatro primeros objetivos generales, salvo el intento clásico de tomar un cono, en diversas representaciones, y hacer cortes para obtener las secciones cónicas.

Para la década del 2000 emergieron los principios y estándares de la NCTM (2000). Los principios, según Marín & Lupiáñez (2005), son los siguientes:

- Igualdad: La buena educación matemática requiere igualdad, es decir, altas expectativas y una base potente para todos los alumnos.
- Currículo: Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en matemáticas importantes, y bien articulado en grados. El énfasis en seleccionar matemáticas importantes o relevantes para los objetivos marcados es muy notable. Por ejemplo, dentro del campo numérico, cita la proporcionalidad y las razones; cita las destrezas de razonar y deducir, la capacidad de predicción a través de las matemáticas o incrementar conocimientos en recursión, iteración, comparación de algoritmos.
- Enseñanza: La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender que los alumnos saben y necesitan aprender y, entonces, retándolos y desafiándolos aprenderán bien.
- Aprendizaje: Los alumnos deben aprender matemáticas, comprendiéndolas, construyendo activamente nuevo conocimiento desde la experiencia y el conocimiento previo.
- Evaluación: La evaluación debería apoyar el aprendizaje de las matemáticas importantes y aprovechar esta información poderosa para ambos, alumnos y profesores.
- Tecnología: La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y refuerza el aprendizaje de los alumnos. (p. 107).

Los estándares que se establecieron fueron basados en contenidos y procesos, que Marín & Lupiáñez (2005), describen así:

Los cinco estándares de contenidos se organizan sobre la base de áreas de contenido matemático, y son: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad. Los otros cinco estándares son de procesos y mediante ellos se presentan modos destacados de adquirir y usar el conocimiento: Resolución de Problemas, Razonamiento y Demostración, Comunicación, Conexiones y Representación. (p. 108).

Son varias las investigaciones que se han hecho sobre el impacto de los principios y estándares para la educación matemática estadounidenses establecidos por la NCTM (2000); sin embargo, sería prudente indagar qué tanto impacto tuvo en países latinoamericanos estas reformas, a pesar de que no fueron pensados para ellos, lo cual también escapa de los objetivos de esta investigación. En cuanto a la Geometría, el Ibid. (2000), plantea que desde el grado prekindergarten hasta el grado 12, los programas de enseñanza deberían construir las condiciones para que cada alumno sea capaz de:

- Analizar características y propiedades de formas geométricas bidimensionales y tridimensionales y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas
- Especificar ubicaciones y describir relaciones espaciales utilizando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.
- Aplicar transformaciones y usar simetría para analizar situaciones matemáticas.
- Usar visualización, razonamiento espacial y modelado geométrico para resolver problemas.

El NCTM organizó sus expectativas por rangos de grados, que van desde prekindergarten hasta el grado 2, de 3° hasta 5°, de 6° hasta 8°, de 9° hasta 12°. Para esta investigación el interés se centra en los grados que van desde noveno (9°) hasta décimo segundo (12°).

La Tabla 1, muestra las expectativas que el NCTM tiene con respecto al aprendizaje de la geometría de los alumnos de los grados que van desde 9° hasta 12°.

Tabla 1. Expectativas en el aprendizaje de la geometría por parte de los alumnos en los grados 9 hasta 12 según el NCTM (2000).

Estándares	Expectativa
<p>Analizar características y propiedades de formas geométricas bidimensionales y tridimensionales y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas</p>	<p>Analizar propiedades y determinar atributos de objetos bidimensionales y tridimensionales;</p> <p>Explorar las relaciones (incluidas la congruencia y similitud) entre clases de objetos geométricos bidimensionales y tridimensionales, hacer y probar conjeturas sobre ellos y resolver problemas que los involucren;</p> <p>Establecer la validez de las conjeturas geométricas mediante la deducción, probar teoremas y criticar los argumentos de otros;</p> <p>Usar relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas de ángulos.</p>
<p>Especificar ubicaciones y describir relaciones espaciales utilizando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.</p>	<p>Utilizar coordenadas cartesianas y otros sistemas de coordenadas, como sistemas de navegación, polares o esféricos, para analizar situaciones geométricas;</p> <p>Investigarán conjeturas y resolverán problemas que involucren objetos bidimensionales y tridimensionales representados con coordenadas cartesianas.</p>
<p>Aplicar transformaciones y usar simetría para analizar situaciones matemáticas.</p>	<p>Comprender y representar traslaciones, reflejos, rotaciones y dilataciones de objetos en el plano mediante el uso de dibujos, coordenadas, vectores, notación de funciones y matrices;</p> <p>Usar varias representaciones para ayudar a comprender los efectos de transformaciones simples y sus composiciones.</p>
<p>Usar visualización, razonamiento espacial y modelado geométrico para resolver problemas.</p>	<p>Dibujar y construir representaciones de objetos geométricos bidimensionales y tridimensionales utilizando una variedad de herramientas;</p> <p>Visualizar objetos y espacios tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones transversales;</p> <p>Usar gráficos de borde de vértice para modelar y resolver problemas;</p> <p>Utilizar modelos geométricos para comprender y responder preguntas en otras áreas de las matemáticas;</p> <p>Utilizar ideas geométricas para resolver problemas y obtener conocimientos sobre otras disciplinas y otras áreas de interés como el arte y la arquitectura.</p>

Al comparar los contenidos y los procesos del decreto 1002 de 1984 expedido por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN (1984), con los estándares propuestos por el NCTM (NCTM, 2000), se podría plantear que mientras el MEN (1984) le apostó a representaciones planas, a la imaginación tridimensional, a representaciones de gráficas relacionadas con las realidad, al análisis del paso de R^3 a R^2 al cálculo de áreas y volúmenes, a la relación entre volúmenes y capacidad y al análisis del sistema métrico decimal y otros usados localmente, el NCTM (2000) le apostó al análisis de las formas bidimensionales y tridimensionales, a la geometría de coordenadas y otros sistemas de representación, a las transformaciones y simetrías y a la visualización, razonamiento espacial y al modelado geométrico. Des-

tacamos que en ambos casos se encuentra la importancia sobre las relaciones de las representaciones bidimensionales y tridimensionales y su estudio, más la importancia de vincular estas representaciones con la vida o realidad de los alumnos y profesores, lo que es muy valioso para el espíritu de esta investigación.

De la revisión histórica que se hizo en Aroca (2019), advierten sobre el problema de enseñar una geometría impuesta de otros contextos y dejar de lado las representaciones sobre espacio y tiempo y sobre los fenómenos de la cotidianidad y del mundo cultural de los alumnos y profesores. Lo anterior se enlaza con la revisión documental que hicieron Jones & Tzekaki (2016) sobre los trabajos que se presentaron en las conferencias anuales de PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education) durante el período 2005–2015. De la extensa revisión de artículos que hicieron, se pudo verificar que la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje en Geometría Analítica/Coordenadas es limitada en la educación básica y media, como también en geometría vectorial.

La construcción de referentes legislativos y curriculares en Colombia

Para principios del siglo XX, el Ministerio de Instrucción Pública, MIP (1904), publicó el Decreto 491 de 1904 y en su artículo 115, referido a la enseñanza en las Escuelas Normales, en su Inciso 15, y en el artículo 120,3 consideró que se debía contemplar la enseñanza de la Geometría plana y del espacio, y en el caso de las Escuelas Normales de varones solamente debían realizarse ejercicios prácticos de Agrimensura. De Geometría Analítica se hablaba solo en las carreras de Ingeniería y de Matemáticas, como lo establece el Capítulo III. Los contenidos de este curso siguen siendo, por lo general, los que hoy día conocemos. Esto último ratificado por Torres-Sánchez & Salazar-Hurtado (2002), en la reconstrucción que hicieron de la historia de la ingeniería y de la educación en Colombia.

A la primera mitad del siglo XX le da la mano el inicio de reformas educativas para el sistema escolar de Colombia. Desde 1951 hasta el 2017 han existido decretos o reformas que han tenido relación directa o indirectamente con la enseñanza de la Geometría Analítica en la educación media. Los decretos o reformas que hacen parte de este proceso histórico se describen así:

Con el Decreto 0075 de 1951, MEN (1951a), se derogan los Decretos marcados con los números 2087 de 1945 y 3645 de 1947 (los cuales, a la fecha de terminado este artículo, no estaban disponibles en el repositorio del MEN), y las demás disposiciones contrarias a las contenidas en el presente Decreto. Con el decreto 0075 se adopta el Plan de Estudios para la enseñanza secundaria y se dictan otras disposiciones al respecto, exige un curso de Geometría para el quinto año de bachillerato, correspondiente al actual décimo grado, pero sin contenidos ni objetivos específicos. En el Decreto 2550 de 1951, MEN (1951b), aparece también un curso de Geometría y Trigonometría para el año quinto de bachillerato; este decreto solo promulga los programas específicos anunciados en el Decreto 0075 del mismo año. Al año siguiente, el 22 de febrero, y en cumplimiento del artículo 8 del decreto 0075 de 1951, se adoptó el Programa de Matemáticas para Bachillerato, así el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1952), expide la resolución 349 de 1952, cuyo contenido para el grado Quinto de Bachillerato, llamado así para ese entonces. La figura 1, muestra los contenidos de este decreto.

3 En este decreto 491 de 1904 se estableció que la instrucción secundaria clásica comprendería todas las enseñanzas de Letras y Filosofía, para el efecto de cursar en las Facultades universitarias, mediante el diploma de Bachiller en Filosofía y Letras.

Figura 1. Contenidos de Geometría del espacio para el Quinto de Bachillerato.

GEOMETRIA DEL ESPACIO — QUINTO AÑO

I. CURVAS PLANAS

Noción general.—Eje, vértice, centro, tangente, normal, coordenadas rectilíneas.—Elipse, radios vectores, círculos directores.—Construcción.—

Área de la elipse.—Parábola, generalidades y construcción.—Hipérbola, generalidades y construcción.

II. PLANOS

Plano.—Determinación y generación del plano.—Objeto de la Geometría del Espacio.—Teoremas fundamentales: recta perpendicular a un plano; plano perpendicular a una recta; rectas y planos perpendiculares; rectas y planos paralelos; ángulos situados en diferentes planos.

III. ANGULOS DIEDROS Y PLANOS PERPENDICULARES

Ángulo diedro y sus clases.—Ángulo plano.—Teoremas fundamentales: rectas trazadas en dos planos perpendiculares; proyecciones sobre un plano; de un punto, de una línea cualquiera, de un ángulo, de una figura.—Ángulo de una recta y un plano y pendiente de una recta.

IV. ANGULOS POLIEDROS

Ángulo poliedro.—Triedro.—Teorema del triedro.—Teorema del ángulo sólido convexo.—Ejercicios numéricos.

V. POLIEDROS

Poliedro o sólido geométrico.—Caras, aristas, vértices, ángulos sólidos, ángulos diedros, diagonales.—Clases de poliedros.—Desarrollo de los poliedros regulares.—Prisma, clases de prisma; bases, altura, sección recta, superficie lateral, superficie total.—Unidad de volumen.—Teoremas fundamentales: igualdad de las caras opuestas de un paralelepípedo; cuadrado de la diagonal; prismas de igual base y altura; sección de un prisma paralelo a la base; áreas lateral y total; volumen del paralelepípedo; volumen de un prisma cualquiera; volumen del cubo.—Pirámide, clases de pirámides, troncos de pirámide.—Teoremas fundamentales: Pirámide cortada por un plano paralelo a la base; área lateral y total de la pirámide; desarrollos de las áreas lateral y total de la pirámide y del tronco; cálculos; equivalencia de dos tetraedros; descomposición de un prisma triangular en tres pirámides equivalentes; descomposición del tronco de pirámide de bases paralelas; volumen de la pirámide y del tronco de pirámide de bases paralelas; problemas y ejercicios; aplicación de los teoremas anteriores; poliedros semejantes y los teoremas de semejanza.—Volumen del tetraedro regular en función de la arista.—Problemas.

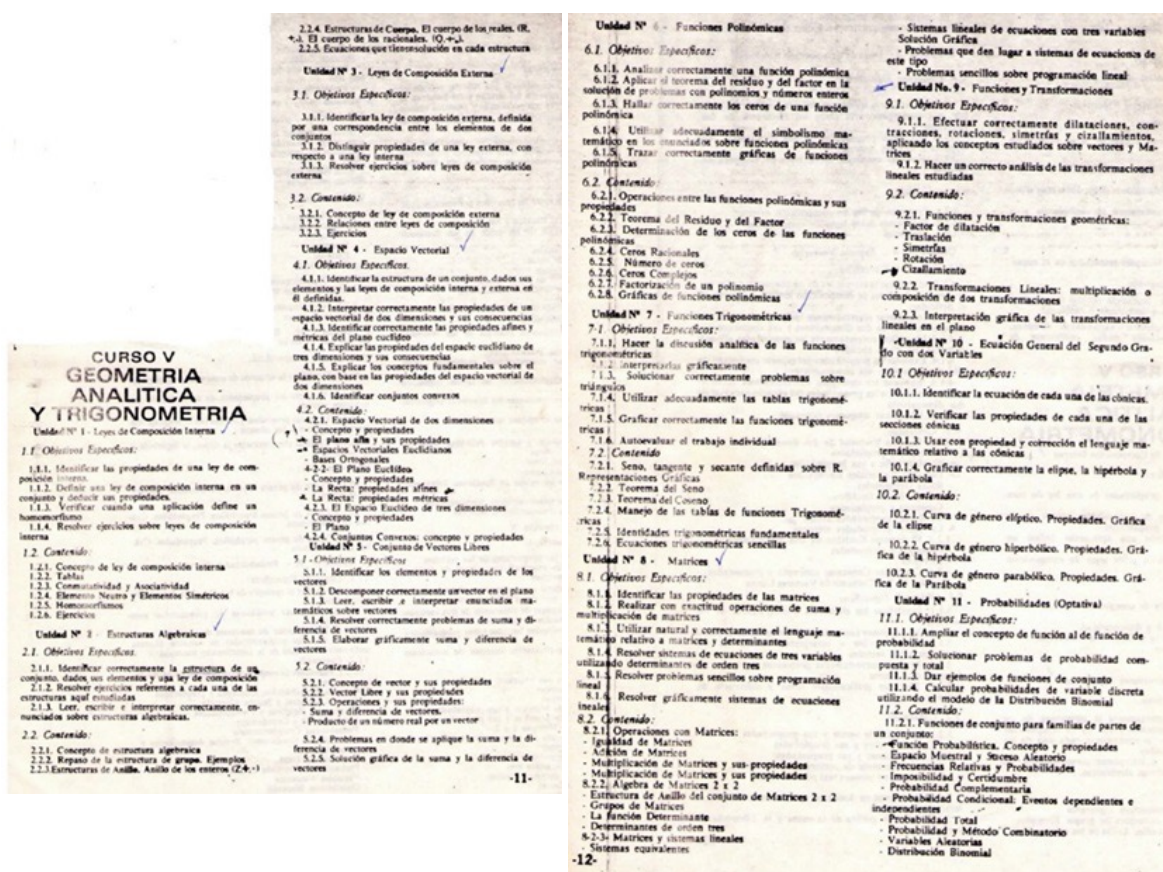
VI. CUERPOS REDONDOS

Sólidos de revolución, superficie de revolución, cilindro de revolución.—Tronco de cilindro.—Teoremas sobre: áreas lateral y total; volumen del cilindro; problemas numéricos y aplicación de las fórmulas deducidas.—Cono de revolución, tronco de cono; teoremas sobre: áreas lateral y total; volumen del cono; problemas de aplicación y desarrollo.—Superficie esférica, esfera; círculo máximo y mínimo; polos; huso esférico, triángulo esférico, esqueta esférica, zona esférica.—Posiciones relativas de un plano y una esfera.—Área de la esfera obtenida por una recta que gira alrededor de un eje situado en un mismo plano; deducciones del área de la zona, del casquete, del huso.—Volumen de la esfera deducido por la demostración de un triángulo que gira alrededor de un eje situado en un mismo plano, y deducciones de los volúmenes del sector esférico, de la cuña, del segmento esférico.—Teorema de Arquímedes.—Problemas de aplicación y numerosos ejercicios y desarrollos.

En el Decreto 45 de 1962 aparecen en el año quinto de bachillerato los cursos de Trigonometría y Elementos de Geometría Analítica. En este decreto se anunció lo siguiente: “Que el Gobierno Nacional, para mejorar la calidad de la educación media y atender a su mayor demanda, ha venido estudiando un plan fundamental mínimo de estudios, en consonancia con las modernas tendencias educativas y las necesidades del país”. Pero el anuncio carece de listados de contenidos u objetivos para cada año.

Con el Decreto 080 de 1974, MEN (1974), conocido como la reforma de la educación media, se deroga el Decreto 45 de 1962 y se producen seis folletos cortos en papel periódico con los programas de cada año de bachillerato (que todavía no se llamaban “grados” ni tenían la numeración actual de sexto a undécimo grado). No se pudieron encontrar ejemplares de esos folletos de quinto y sexto bachillerato en el repositorio del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, pero estos fueron escaneados por el profesor Carlos Vasco y enviados al autor. El 4 de febrero de 1975, mediante la resolución 277, el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1975), adapta los Programas de Matemáticas de lo que hoy se denomina sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo y undécimo. A continuación, figura 2, se presenta el Curso V denominado Geometría Analítica y Trigonometría.

Figura 2. Programa de matemáticas del Curso V: Geometría Analítica y Trigonometría



El 5 de junio de 1996 el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1996), expidió la resolución número 2343 con el “cual se adopta un diseño de lineamientos generales de los procesos curriculares del servicio público educativo, y se establecen los indicadores de logros curriculares para la educación formal”. La figura 3, muestra los indicadores de logro curriculares comunes para los grados de Décimo y Undécimo de la educación media.

Figura 3. Indicadores de logro curriculares comunes para los grados de Décimo y Undécimo de la educación media.

7. MATEMATICAS

- Da razones del porqué de los números reales y explica por qué unos son racionales y otros irracionales.
- Utiliza el sentido de las operaciones y de las relaciones en sistemas de números reales.
- Interpreta instrucciones, expresiones algebraicas, diagramas operacionales y de flujo y traduce de unos a otros, en el sistema de los números reales.
- Investiga y comprende contenidos matemáticos a través del uso de distintos enfoques para el tratamiento y resolución de problemas; reconoce, formula y resuelve problemas del mundo real aplicando modelos matemáticos e interpreta los resultados a la luz de la situación inicial.

Ministerio de Educación Nacional

- Elabora modelos de fenómenos del mundo real y de las matemáticas con funciones polinómicas, escalonadas, exponenciales, logarítmicas, circulares y trigonométricas; las representa y traduce mediante expresiones orales, tablas, gráficas y expresiones algebraicas.
- Aplica modelos de funciones para tratar matemáticamente situaciones financieras y transacciones comerciales frecuentes en la vida real.
- Analiza situaciones de la vida diaria generadoras de las ideas fuertes del cálculo, tales como tasa de cambio, tasa de crecimiento y total acumulado; descubre y aplica modelos de variación para tratarlas matemáticamente.
- Hace inferencias a partir de diagramas, tablas y gráficos que recojan datos de situaciones del mundo real; estima, interpreta y aplica medidas de tendencia central, de dispersión y de correlación.
- Reconoce fenómenos aleatorios de la vida cotidiana y del conocimiento científico, formula y comprueba conjeturas sobre el comportamiento de los mismos y aplica los resultados en la toma de decisiones.
- Formula hipótesis, las pone a prueba, argumenta a favor y en contra de ellas y las modifica o las descarta cuando no resisten la argumentación.
- Elabora argumentos informales pero coherentes y sólidos para sustentar la ordenación lógica de una serie de proposiciones.
- Detecta y aplica distintas formas de razonamiento y métodos de argumentación en la vida cotidiana, en las ciencias sociales, en las ciencias naturales y en las matemáticas; analiza ejemplos y contraejemplos para cambiar la atribución de necesidad o suficiencia a una condición dada.
- Planifica colectivamente tareas de medición previendo lo necesario para llevarlas a cabo, el grado de precisión exigido, los instrumentos adecuados y confronta los resultados con las estimaciones.
- Disfruta y se recrea en exploraciones que retan su pensamiento y saber matemáticos y exigen la manipulación creativa de objetos, instrumentos de medida y materiales y medios.

El Decreto 1419 de 1978, MEN (1978), hizo énfasis en las normas y orientaciones básicas para la administración curricular en los niveles de educación preescolar, básica (primaria y secundaria), media

vocacional e intermedia profesional; en el Decreto 10024 de 1984, MEN (1984), se establece el Plan de Estudios Para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional, en su capítulo III, establece la organización y distribución de 30 horas semanales para la educación media vocacional. En el decreto 1002 de 1984 se adjuntó un libro de marco teórico con el contenido completo para toda la básica de primero a noveno, no obstante, este libro no trata la educación media vocacional de décimo y undécimo grado. Muchos de los contenidos de los decretos anteriores no están digitalizados; sin embargo, la Universidad Industrial de Santander sí digitalizó los programas de matemáticas de sexto a noveno grado, pero esos programas nunca entraron en vigor, pues la Ley General de Educación de 1994, MEN (1994), dio a cada colegio la potestad de elaborar sus propios programas específicos para cada área y cada grado según su propio Proyecto Educativo Institucional PEI.

A pesar de contar con los documentos oficiales, resoluciones o decretos expedidos por el MEN, quisimos conocer qué pasó en la realidad de tres profesores de matemática que dieron el curso de Geometría Analítica en diferentes décadas. Así, se estableció como estrategia de recolección de información consultar a tres profesores que enseñaron Geometría Analítica en grado 10° en la década del 80, del 90 y en el 2017. No fue posible encontrar un profesor que hubiera enseñado dicho curso en la década del 70.

Lo anterior implicó un cambio en el tipo de datos, pues se venía presentando una revisión documental y legislativa y ahora se pasará a una información referida a tres entrevistas. Caminar por distintos senderos en muchas ocasiones implica “salirse” del camino para comprender rasgos, características, momentos, del mismo camino; por ello, se decidió entrevistar a estos tres profesores. Se le pidió a cada uno de ellos que escribiera cuáles fueron los contenidos que se enseñaron en ese año y grado, y que explicara cómo habían obtenido la información necesaria para planificar su curso. Todos coincidieron en afirmar que la obtuvieron de un texto guía. Los programas de matemáticas que emplearon los tres profesores se presentaron en Aroca (2019), el primer profesor basó su programa en Patiño (1977), el segundo profesor lo basó en Lehmann (1989) y Leithold (1998) y el tercer profesor lo basó en Riaño (2017a).

Si se toman como referencia los tres programas desarrollados por el primer profesor, el segundo profesor y el tercer profesor, se nota inmediatamente que ellos tienen algunas coincidencias, entre las cuales llama la atención la siguiente: hay ausencia del paso formal del espacio 2d con las variables x , y , a la representación del espacio 3d con tres variables x , y , z , es decir, cuando se representan en el plano problemas sobre el espacio tridimensional, en ningún caso se trata de volver de la proyección en 2d hacia el espacio tridimensional.

Cuando se les preguntó por los problemas de aplicación, los tres profesores tuvieron respuestas similares, que en Aroca (2019) se describieron como: el barco que se acerca al muelle, el acantilado muy perpendicular al suelo, el vuelo del avión, la forma del túnel o de la antena, entre otros clásicos problemas que aún hoy día, en ediciones nuevas de textos de Matemáticas para grado 10° se siguen encontrando. En estos problemas descritos por los profesores, no parece notarse el aplanamiento de las imágenes mentales evocadas por esos problemas de aplicación en 3d a las representaciones en 2d, ni de recuperar la tercera dimensión.

Para completar las entrevistas hechas a los tres profesores, se construyó la Tabla 1, que muestra un breve análisis de los problemas de aplicación de secciones cónicas dados en tres textos escolares de matemáticas más los problemas de aplicación que se presentaron en las clases observadas, cuyos cortes analíticos se dan desde 1993 hasta el 2017.

⁴ Vale la pena aclarar que la mayoría de estos decretos que fueron citados, tenían enunciados o encabezados como “Se establece el plan de estudio...” pero no se mostraban dichos planes de estudio. Por lo general eran expedidos por resolución ministerial en documentos aparte que no fueron digitalizados.

Tabla 1. Temas encontrados en problemas de aplicación de secciones cónicas.

	Referencias			
Sección cónica	Beltrán, L.; Rodríguez, B.; Dimaté, M. (1997). <i>Matemáticas con tecnología aplicada</i> . Bogotá: Prentice Hall.	Moreno, V.; Restrepo, M. (2003). <i>Alfa 10, con estándares. Serie matemáticas para educación secundaria y media</i> . Bogotá: Grupo editorial Norma.	Buitrago, L.; Romero, J.; Ortiz, L.; Jiménez, J. (2013). <i>Los caminos del saber. Matemáticas 10</i> . Bogotá: Santillana.	Los problemas de aplicación desarrollados en las clases observadas. (2017-2).
Circunferencia	Ninguna aplicación de 20 actividades propuestas. 0% de problemas de aplicación. Ver páginas: 121, 123.	No se desarrolla el tema de Circunferencia.	<ul style="list-style-type: none"> •Diseño de una transmisión de movimiento. •Velocidad de un punto que gira alrededor de una circunferencia. •Conjunto de puntos por donde pasa una onda circular que se propaga sobre el agua. •Circunferencias en un tanque cilíndrico. •Alturas de puntos que se mueven circularmente. •Propagación del sonido después de una detonación de una carga explosiva. •Antenas de radio que emiten ondas. •Construcción de un desagüe en un piso circular <p>8 problemas de aplicación de 83 actividades propuestas. 9% de problemas de aplicación. Ver páginas: 228, 232, 237, 239.</p>	<ul style="list-style-type: none"> •Trayectoria de un avión que vuela en círculo. •Diseño de un engranaje. •Diseño de una arandela. <p>Ver Transcripción de Clase 4. C4. 13-09-17.</p>

<p>Parábola</p>	<p>Ninguna aplicación de 50 actividades propuestas. 0% de problemas de aplicación. Ver páginas: 125, 127, 129, 131.</p>	<ul style="list-style-type: none"> •Tiempo de caída de un objeto. •Altura de un punto de un cable entre dos torres. •Altura de un punto que toma como referencia un arco de una casa. <p>3 problemas de aplicación de 18 actividades propuestas. 17% de problemas de aplicación. Ver páginas: 156, 157, 158.</p>	<ul style="list-style-type: none"> •Diseño de un camino o carretera. •Espejo de una linterna •El espejo de un telescopio. •Trayectoria de un objeto, por ejemplo: una pelota de golf. •Diseño de una estufa solar con forma de paraboloides. •Sección transversal de un canal de irrigación. •Punto construido en forma de arco parabólico. <p>7 problemas de aplicación de 106 actividades propuestas. 6% de problemas de aplicación. Ver páginas: 244, 247, 249, 253, 254.</p>	<ul style="list-style-type: none"> •Producción de carros de juguete. •Cable sostenido por dos columnas de un puente. •Antena parabólica. <p>Ver Transcripción de Clase 9. C9. 18-10-17.</p>
<p>Elipse</p>	<ul style="list-style-type: none"> •Movimientos de cuerpos celestes y sus órbitas. •Movimiento de satélites en torno a la tierra. <p>3 problemas de aplicación de 32 actividades. 9% de problemas de aplicación. Ver páginas: 133, 1335, 137, 139.</p>	<ul style="list-style-type: none"> •Arco de un túnel. •Órbita de un cometa. <p>2 problemas de aplicación de 9 actividades propuestas. 22% de problemas de aplicación. Ver página: 164.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Un perro amarrado al cuello con dos cuerdas. <input type="checkbox"/> Trayectoria de un planeta. <input type="checkbox"/> Arco semielíptico que sostiene un puente. <input type="checkbox"/> Un puente sostenido por cables con tramo semielípticos. <input type="checkbox"/> Pista de carreras. <p>5 problemas de aplicación de 52 actividades propuestas. 9% de problemas de aplicación. Ver páginas: 259, 264, 265.</p>	<p>No se desarrollaron problemas de aplicación de la Elipse.</p>

<p>Hipérbola</p>	<ul style="list-style-type: none"> •Ángulo de elevación. •Alturas dados el ángulo de elevación y otros datos. <p>2 problemas de aplicación de 20 actividades. 10% de problemas de aplicación. Ver páginas: 141, 143, 145,147.</p>	<p>Ubicación de una explosión dados dos puntos de referencia.</p> <p>1 problema de aplicación de 10 actividades propuestas. 10% de problemas de aplicación. Ver página: 171.</p>	<ul style="list-style-type: none"> •Emisión de sonidos de dos emisoras y un barco receptor. •Trayectoria de un avión. •Producción de dos tipos de productos por parte de una fábrica. •Explosiones simultaneas en dos puntos diferentes. <p>4 problemas de aplicación de 79 actividades propuestas. 5% de problemas de aplicación. Ver páginas: 268, 270, 273, 274.</p>	<p>No se desarrollaron problemas de aplicación de la Hipérbola.</p>
-------------------------	---	--	---	---

Los maestros entrevistados están de acuerdo en que los temas que se han enseñado durante la última parte del siglo XX y en los veinte años que corren del XXI tienen una clara base común: el estudio de la línea recta, la ecuación general de segundo grado, las secciones cónicas representadas principalmente en el sistema cartesiano de 2d, y en que los problemas de aplicación son similares.

La construcción de la tabla anterior deja abiertas ventanas de investigación para futuros proyectos relacionados con el presente: 1. Cuáles fueron las relaciones de lo enseñado por los tres profesores con respecto al Decreto 080 de 1974, MEN (1974), que planteaba cómo debía ser el Programa de Geometría Analítica y cuáles fueron las relaciones con el Resolución número 234 de junio 6 de 199 que regulaba los lineamientos generales de los procesos curriculares y los indicadores de logros curriculares para la educación formal. 2. Analizar un mayor número de textos escolares de matemáticas para la educación media desde 1950 hasta hoy, estableciendo más y mejores criterios de selección; en ellos se puede avanzar en recoger y analizar los problemas de aplicación que se propongan después de estudiar cada sección cónica. 2. Analizar la transposición didáctica de cada autor de texto al traducir los aspectos más técnicos de las matemáticas puras a las distintas presentaciones y aplicaciones de las secciones cónicas que seleccionó para estos grados escolares. 3. La restricción aparente de los tratamientos y problemas sobre las secciones cónicas solo a unos pocos temas clásicos y la distancia con los temas actuales de georreferencia, localización satelital, GPS. 4. Analizar un poco más qué entendemos actualmente y qué entiende cada autor por “problema de matemáticas”, “problema de aplicación”, “aplicación de los temas seleccionados” y su relación con las “motivaciones” para estudiarlos y resolverlos que suelen aparece al comienzo de los capítulos respectivos.

El MEN (1998a) establece los Indicadores de logros curriculares, allí se encuentra el concepto de Procesos de la dimensión corporal, que se plantea como:

En esta dimensión se identifican procesos interdependientes que tienen su propia especificidad a partir de la cual se construyen prácticas y discursos particulares que corresponden a procesos de desarrollo del ser humano que se conforman y se expresan como totalidad. Los procesos componentes de la dimensión corporal son entre otros: habilidad práctica, experiencia corporal, experiencia lúdica, la inteligencia corporal - kinestésica y la inteligencia espacial. (p.25-26)

Posteriormente se plantea que:

e. La inteligencia corporal-kinestésica y la inteligencia espacial

En el estudio de los procesos de la dimensión corporal pueden incluirse dos tipos de inteligencia citados por Carlos Vasco, a propósito de las investigaciones de Gardner sobre las inteligencias múltiples. Tales son: la inteligencia corporal kinestésica y la inteligencia espacial. (p.27).

Y sobre la inteligencia espacial, planteó lo siguiente:

La inteligencia espacial identificada por Gardner como muy apreciada por ciertas culturas como los navegantes Powlat de las islas Carolinas en el Pacífico, en donde realizan grandes desplazamientos sin ayuda de brújula, únicamente guiados por las estrellas. Es un tipo de inteligencia que se basa “en el manejo de la información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación, y distribución de espacios” (Carlos Vasco, MEN). (p.27).

Esta inteligencia espacial, que en el MEN (1998b) será llamada Pensamiento espacial y sistemas métricos, ha jugado un papel esencial en el desarrollo de la humanidad, pues se trata como lo establece la anterior cita, de procesos de ubicación, orientación, distribución de espacios, pero también de candidatura, temporalidad, durabilidad, inherentes a esos procesos anteriores, es decir al pensamiento temporoespacial que es objeto de desarrollo en los cursos de Geometría analítica de la educación media.

En MEN (1998b), cuando se establecen los lineamientos curriculares en matemáticas, se hace más énfasis en pensamiento espacial y sistemas geométricos, y se considera como un conocimiento básico y esencial para el pensamiento científico. Como se puede notar en la siguiente cita que Ibid (1998b) planteó:

Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial. (p.37).

Posteriormente plantea lo siguiente:

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales. (p.37)

Luego se hace un desarrollo conceptual sobre Geometría activa, Cuerpos, superficies y líneas, Desarrollo del pensamiento geométrico, Representación bidimensional del espacio tridimensional y por último Las transformaciones. De estos temas, si bien todos son afines a nuestra investigación, el tema de Represen-

tación bidimensional del espacio tridimensional o cupa un lugar destacado. Sobre este tema Ibid (1998b) conceptualiza lo siguiente: Otro aspecto importante del pensamiento espacial es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio.

En este documento, hay un buen desarrollo teórico sobre el paso del análisis de figuras en el plano, 2d, a lo tridimensional, 3d, pero también se hace énfasis en la importancia del estudio de los sólidos. Bien vale pena revisar este documento. En el MEN (1998b) se hace entonces por primera vez una conceptualización sobre pensamiento espacial y de forma implícita sobre sus relaciones con lo temporal debido a la vinculación del movimiento relacionado con el paso de representaciones en 2d a 3d.

En el año 2006, después de cuatro años de reuniones y consultas, el Ministerio de Educación Nacional publicó los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, MEN (2006). Dos de los seis estándares básicos de competencias están muy relacionados con el presente estudio. Se refieren al gran tema del pensamiento espacial y sistemas geométricos:

- “Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas” [las cursivas son nuestras].
- “Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras”.

Pero como estos estándares no se acompañaron de materiales curriculares, ejemplos ni problemas, ni afectaron los cursos de formación de licenciados en matemáticas, es poco probable que hayan tenido algún efecto en la enseñanza de la Geometría Analítica en los colegios. En parte por la poca influencia que tuvieron los estándares y por la persistencia del bajo rendimiento en matemáticas de los bachilleres en las pruebas SABER 11 y en las pruebas PISA, en el año 2016 aparece un documento que trata de exigir más rigor y precisión a los profesores: los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para Matemáticas, MEN (2016a). Luego el mismo MEN edita una segunda edición, después de muchos cuestionamientos hacia los DBA que retornaban a la enseñanza por contenidos y los cuales habían sido diseñados por personas con poca experiencia en los niveles escolares a emplear y más que textos escolares de matemáticas parecían manuales de contenidos dispersos, se emite una segunda edición de ellos, MEN (2016b). Estos “Derechos Básicos” se concretan en el mismo año, MEN (2016c), en algunas propuestas curriculares más detalladas, llamadas “Mallas de aprendizaje para secundaria y media”.

En Medina (2018, p.54) se afirma lo siguiente: “Por otra parte, la Geometría Analítica se incluyó por primera vez en el programa para grado quinto de bachillerato”, haciendo referencia al año de 1962, según el MEN (1962). Sin duda la denominación para un curso o asignatura, con el nombre de Geometría Analítica se incluyó por primera vez en la educación escolar, pero vemos como los temas de Geometría del Plano o del Espacio ya se analizaban previamente.

Si se pone en relación con los aspectos que emergieron en la revisión de literatura de corte histórico internacional, se abona que no hubo dudas sobre las temáticas generales que se deberían enseñar en Geometría Analítica (aunque por la influencia de Bourbaki sí hubo dudas sobre si se debería enseñar o no la geometría plana euclidiana). Si acaso, aparecen discusiones sobre qué es lo más adecuado para enseñar en el bachillerato o lo que más bien se debe dejar para los primeros años de universidad. Pero se mantiene la indiferencia de los expertos y los autores de textos escolares ante las diferencias sociales, educativas y culturales de los distintos países y la desconexión de las actividades curriculares de matemáticas con el mundo espacial cotidiano fuera del aula. Se nota en todas partes la ausencia del paso de 2d a 3d. Aunque

aparece la conversión de coordenadas cartesianas a polares y viceversa, no aparecen las coordenadas cilíndricas ni esféricas. No dar ese paso a las representaciones en 3d es limitar el conocimiento de los fenómenos en otras representaciones espaciales que le pueden permitir tanto al profesor como a alumnos otro tipo de expresiones témporo-espaciales más arraigadas a su vida cotidiana. Para finalizar, en Aroca (2019), también se presentó una revisión de textos escolares editados en el periodo de la recolección de referentes legislativos y curriculares, y remitimos a su conocimiento en dicho artículo.

4. Conclusiones

La revisión histórica y literaria anteriores se recorrieron porque se vio la necesidad de presentar algunos aspectos que influyeron en la constitución de la asignatura de la educación media colombiana que día denominamos Geometría Analítica, pues ello permitió identificar diversos enfoques de enseñanza que hoy perduran en nuestras aulas de clase y que, por ende, condicionan, se oponen o estimulan distintas formas de expresión gráfica, plástica, verbal y simbólica de las imágenes y modelos mentales tanto de alumnos como de profesores a la hora de resolver actividades matemáticas relacionadas con los temas descritos. Consideramos que el aporte más importante de este artículo es haber hecho un segundo esfuerzo de construcción de la historia legislativa y curricular de dicha asignatura.

Referencias bibliográficas

- Aroca, A. (2019). La enseñanza de la geometría analítica en la educación media. *Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica*, 22(1), 1-7. <https://doi.org/10.31910/rudca.v22.n1.2019.1222>
- Beltrán, L.; Rodríguez, B.; Dimaté, M. (1997). *Matemáticas con tecnología aplicada*. Bogotá: Prentice Hall.
- Moreno, V.; Restrepo, M. (2003). *Alfa 10, con estándares. Serie matemáticas para educación secundaria y media*. Bogotá: Grupo editorial Norma.
- Buitrago, L.; Romero, J.; Ortiz, L.; Jiménez, J. (2013). *Los caminos del saber. Matemáticas 10*. Bogotá: Santillana.
- Bishop, A. (2005). *Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática*. Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.
- Bloom, B.S., Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals, by a committee of college and university examiners. Handbook I: Cognitive Domain*. New York: Longman, Green.
- Bourbaki, N. (1969). Formas cuadráticas. *Geometría elemental*. En: J. Hernández. (Ed.), *Elementos de historia de las matemáticas* (pp. 173-191). España: Alianza Editorial.
- Cocho, F. (1985). El Programa de Erlangen. Felix Klein. *Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación*, 2(49),1-3.
- Colombiana. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-103663_archivo_pdf.pdf
- Dieudonné, J. (1964). Prólogo del libro *Álgebra lineal y geometría elemental*. En Piaget, J.; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom, R. (Eds.), *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial.

- Gascón, J. (2001). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático. *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales*, Madrid, Universidad Nacional de Educación a Distancia, 28, 1-20.
- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA, Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 39, 13-25.
- Gerdes, P. (1996). *Women, Culture and Geometry in Southern Africa*. Mozambique: Lulu.
- Gerdes, P. (1999). *Geometry from Africa: Mathematical and Educational Explorations*. USA: The mathematical Association of America.
- Gerdes, P. (2014). *Sona geometry from Angola. Mathematics of an African tradition*. Mozambique: IS-TEG-University, Mozambique & Lulu.
- Harris, P. (1984). *Teaching about Time in Tribal Aboriginal Communities, Mathematics in Aboriginal Schools Project 2*. Darwin, Australia: D.D.C. and N.T. Department of Education.
- Howson, A.G. (1973). *Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*. Cambridge U. P., Cambridge.
- Jones, K.; Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez.; Leder, G.; P. Boero. (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense.
- Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica. Edición 13*. México: Editorial Limusa.
- Leithold, L. (1998). *El cálculo. Séptima edición*. México: Oxford University Press- Harla.
- Lluis, E. (1986). Enseñanza de geometría en América Latina. En Morry, E. (Ed.). *Enseñanza de geometría. Vol. 5*. Uruguay: Oficina Regional de Ciencia y Tecnología de la Unesco para América Latina y el Caribe - ROSTLAC.
- Marín, A.; Lupiañez, J.L. (2005). Principios y estándares para la educación matemática: una visión de las matemáticas escolares. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/12342118.pdf>
- Medina, C. (2018). *Los planes y programas de matemáticas en bachillerato: discursos, saberes y prácticas. Historia de la enseñanza de las matemáticas en la segunda mitad del siglo XX en Colombia. Tesis de maestría. Maestría en Educación, Facultad de Educación. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia*.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1951a). Decreto número 0075 del 17 de enero de 1951. Por el cual se adopta el Plan de Estudios para la enseñanza secundaria y se dictan otras disposiciones. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-103400_archivo_pdf.pdf
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1951b). Decreto número 2550 del 11 de diciembre de 1951. Modificaciones en el plan de estudios de enseñanza secundaria y otras dispo-

siones. Por el cual se introducen algunas modificaciones en el Plan de Estudios de Enseñanza Secundaria, y se deroga una disposición. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-103340_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1952). Programas de matemáticas. Publicación oficial. Bogotá: Prensas del Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1962). Decreto 45 de 1962, por el cual se establece el Ciclo Básico de Educación Media, se determina el Plan de Estudios para el Bachillerato, y se fijan Calendario y Normas para evaluar el trabajo escolar. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1759/w3-article-103679.html?_noredirect=1

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1974). Decreto 080 de 1974. Por el cual se deroga el Decreto número 045 de 1962 y se dictan otras disposiciones sobre Educación Media. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-104657_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1975). Decreto 080. Por la cual se adoptan unos Programas de estudio para la Educación Media. Recuperado de <https://drive.google.com/drive/folders/1qhJuFpXyOgB8-4FjDr1Agwp6EOUfBiMd>

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1978). Decreto 1419 de 1978, por el cual se señalan las normas y orientaciones básicas para la administración curricular en los niveles de educación preescolar básica (primaria y secundaria) media vocacional e intermedia profesional. Bogotá, Colombia. Recuperado de <https://www.mineduacion.gov.co/normatividad/1753/w3-article-102770.html>

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1978). Decreto número 1419 del 17 de julio de 1978. Por el cual se señalan las normas y orientaciones básicas para la administración curricular en los niveles de educación pre-escolar básica (primaria y secundaria) media vocacional e intermedia profesional. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-102770_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1984). Decreto 1002 de 1984, por el cual se establece el Plan de Estudios Para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional de la Educación Formal Colombiana. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1759/w3-article-103663.html?_noredirect=1

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1994a). Ley General de Educación. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1994b). Decreto 1860. Por el cual se reglamenta parcialmente la Ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-172061_archivo_pdf_decreto1860_94.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1996). Serie documentos especiales. Resolución número 234 de junio 6 de 1996. Por la cual se adopta un diseño de lineamientos generales de los procesos curriculares del servicio público educativo y se establecen los indicadores de ogros curriculares para la educación formal. Bogotá: Departamento de Arte. El espectador.

- Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1998a). Indicadores de logros curriculares. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf11.pdf
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1998b). Lineamientos curriculares en matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Documento No. 3. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (2016a). Derechos Básicos de Aprendizaje para Matemáticas. Vol. 2. Bogotá: Panamericana Formas E Impresos S.A.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (2016b). Derechos Básicos de Aprendizaje para Matemáticas. Vol. 2. Bogotá: Panamericana Formas E Impresos S.A.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (2016c). Documento Fundamentación Teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje, Vol. 2, y de las Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Ministerio de Instrucción Pública, MIP. (1904). Decreto número 491 de 1904, por el cual se reglamenta la ley 89 de 1903, sobre instrucción pública. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-102515.html?_noredirect=1
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Patiño, G. (1977). *Fundamentos de matemática superior moderna: cursos quinto y sexto de enseñanza media*. Medellín: Bedout.
- Piaget, J.; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom, R.; et al. (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial.
- Pinxten, R.; Van Dooren, I.; Harvey, F. (1983). *The Anthropology of Space*. Pennsylvania: University Pennsylvania Press.
- Riaño, C.A. (2017a). *Matemáticas 10. Guía del docente*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Riaño, C.A. (2017b). *Matemáticas 10. Guía del alumno*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Santaló, L. (1980). Situación de la enseñanza de la geometría frente a las nuevas tendencias de la Educación matemática. *Revista de Bachillerato, suplemento*, (13): 23-28.
- Torres-Sánchez, J.; Salazar-Hurtado, L.A. (2002). *Introducción a la historia de la ingeniería y de la educación en Colombia*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Unesco. (1986). *Estudios en Educación Matemática. Enseñanza de geometría*. Vol. 5. En E. Morry. (Ed.). Uruguay: Oficina Regional de Ciencia y Tecnología de la Unesco para América Latina y el Caribe - ROSTLAC.